PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. 1. August 1916. 17. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 16 am 5. August 1916.

INHALT:

Originalmitteilungen:
W. Schmidt, Zur Fortpflanzung des Schalles in der freien Atmosphäre. S. 333.
V. Bjerknes, Über thermodynamische Maschinen, die unter Mitwirkung der Schwerkraft arbeiten. I. S. 335.
C. W. Oseen, Über die Extinktion des Lichtes. II. S. 341.
H. Greinacher, Eine neue Hochspannungsbatterie. S. 343.
A. Werner, Über den elektrischen Widerstand des Wismuts. S. 346.
C. H. Graf v. Bressler, Eine neue Anordnung zur Darstellung stehender Wechselstromkurven mit der Braunschen Röhre. S. 349.
Zusammenfassende Bearbeitungen:
W. Ostwald, Neue Forschungen zur Farbenlehre. II. S. 352.
Besprechungen:
H. Dingler, Die Grundlagen der Naturphilosophie. S. 364.
K. Sumpf u. K. H. L. Magnus, Der praktische Lehrer. S. 364.
Tagesereignisse. S. 364.
Personalien. S. 364.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Fortpflanzung des Schalles in der freien Atmosphäre.

Von Wilhelm Schmidt.

Wie natürlich, trat in den letzten Zeiten die Frage nach der Fortpflanzung des Schalles in der freien Atmosphäre mehrfach in den Vordergrund. Die beiden darauf bezüglichen Notizen, welche vor kurzem in dieser Zeitschrift erschienen[1]), möchte ich in wesentlichen Punkten ergänzen.

Wahrscheinlich liegt es an einem nicht ganz bezeichnenden Ausdruck, daß ein Fernerstehender sich nicht das richtige Bild von den zu erklärenden Beobachtungstatsachen macht: man spricht bei starken Schallerscheinungen von einer „Zone des Schweigens", die sich um ein inneres, die Schallquelle enthaltendes Gebiet normaler Hörbarkeit herumlegt und auf die weiter außen eine rätselhafte „Zone abnormer Hörbarkeit" folgen soll. Durch das Wort Zone, Gürtel, wird unmittelbar die Vorstellung einer nach den verschiedenen Richtungen beiläufig gleich entwickelten Erscheinung erweckt und gerade darin widerspricht sie der Beobachtung.

Von den Fällen, die bis nun genauer untersucht wurden, führe ich an: die Dynamitexplosion an der Jungfraubahn 1908, bei welcher die Erscheinung zuerst auffällig auftrat (bearbeitet von A. de Quervain), die Dynamitexplosion zu Förde in Westfalen (G. v. d. Borne), die Roburitaufflammung zu Witten-Annen (G. v. d. Borne), die Pulverexplosion am Laibacher Felde (A. Belar), das Auffliegen des Pulvermagazins in Kobe (S. Fujiwhara), eine Reihe von Ausbrüchen des japanischen Vulkans Asama vom Dezember 1909 bis Dezember 1911 (S. Fujiwhara), die Explosion des Sprengstoffmagazins am Steinfeld bei Wiener-Neustadt 1912 (J. N. Dörr), Beobachtungen aus dem gegenwärtigen Krieg, insbesonders vom nordwestlichen Kriegsschauplatz, am deutlichsten anläßlich der Beschießung von Antwerpen (nach den Meldungen aus den Niederlanden zusammengestellt durch E. van Everdingen, für die anschließenden Gebiete Deutschlands durch W. Meinardus, W. Brand), schließlich im Sundgau (A. de Quervain). Davon sind im ganzen über 30 durch Karten dargestellt.

In allen diesen Fällen wurde nun kein einziges Mal ein auch nur annähernd ringförmig geschlossenes Gebiet „abnormer Hörbarkeit" beobachtet. Es gibt da vielmehr die verschiedensten Formen: von beinahe kreisförmigen bloß um die Schallquelle herum bis zu langgestreckten, zuweilen auch gekrümmten, dann zu solchen mit Einschnürungen und schließlich Abschnürungen, so daß ein oder mehrere Außengebiete vollkommen getrennt liegen. Soweit man dies von einem zufälligen, zuweilen wohl auch schon mit vorgefaßter Meinung gesammelten Material nur irgend erwarten kann, lassen sich die Fälle in einer Reihe einordnen, bei der jeder Schnitt, jede Abteilung in zwei Gruppen willkürlich oder rein äußerlich erscheint. Selbst in dem Beispiel vom Steinfelde, dem weitaus regelmäßigsten und überdies durch die größte Meldungszahl belegten, umfaßt das sichelförmige Außengebiet das stark exzentrisch gelegene Innengebiet nicht einmal in einem halben Bogen.

Überall dort, wo von einer Symmetrie überhaupt gesprochen werden kann, ist es keine allseitige, zentrale, sondern ausgesprochen eine einfache zu beiden Seiten einer Geraden. Als

1) Fr. Nölke, Zur Erklärung der beim Geschützdonner, bei großen Explosionen usw. beobachteten Fortpflanzungseigentümlichkeiten des Schalles, diese Zeitschr. 17, 31, 1916; V. Kommerell, Die Bahn der Schallstrahlen in der Luft unter dem Einfluß der Temperatur, diese Zeitschr. 17, 172, 1916.

vornehmlichste Ursache dafür darf nur eine einseitig wirkende angenommen werden; sie muß überdies stark wechseln, denn die Abmessungen der Gebiete sind oft recht verschieden. So wurde z. B. der Innenrand der Außenzone selbst in den Fällen, die als schöne Beispiele für das Auftreten des Gebietes abnormer Hörbarkeit gelten, einmal zu 110, anderemale zu 130, 160 und 180 km Abstand vom Ursprung angegeben[1]). Im allgemeinen ist der Spielraum viel größer.

Nach all diesem kommt von den meteorologischen Vorgängen in erster Linie der Wind als Ursache in Betracht. Seine Stärke wechselt sowohl zeitlich, wie auch örtlich — in den einzelnen Höhenschichten — so stark, daß sich daraus auch die verwickelteren Gebiete im allgemeinen erklären lassen müßten. Bedingen doch gerade vertikale Windgradienten ein starkes Abbiegen der Schallstrahlen[2]). Daneben mögen aber immerhin noch andere Einflüsse, vertikale Temperaturverteilung z. B., eine besondere Rolle spielen. Hierher gehörige Beobachtungen wurden ja auch sonst, besonders zur Winterszeit, gemacht.

Nun stehen uns leider verläßliche Angaben über meteorologische Verhältnisse nur von den untersten Luftschichten zur Verfügung. Unbemannte Aufstiege, die etwa 20 km Höhe erreichen, sind selten, ebenso weiter hinaufreichende Pilotballonverfolgungen.

Vielleicht läßt sich aber doch in einer größeren Anzahl von Fällen schon aus solchen Beobachtungen viel erklären; mehr wohl, als V. Kommerell annimmt, obschon er nicht mit Unrecht darauf hinweist, daß die großen wagerechten Erstreckungen der Gebiete der Hörbarkeit auch entsprechend hohe senkrechte wahrscheinlich machen: es wäre nicht von der Hand zu weisen, daß Schallstrahlen zuerst in Höhen von 70—100 km emporstiegen, dort zur Umkehr gebracht würden und so die Gebiete abnormer Hörbarkeit erzeugten, wie es von den Vertretern einer Reflexion oder Abbiegung an der Wasserstoffsphäre (v. d. Borne, A. Wegener, E. van Everdingen) behauptet wird.

Gerade diese letzte Theorie halte ich aber für physikalisch vollkommen unbrauchbar, weil sie in bezug auf die Intensitätsverhältnisse gänzlich versagt. In jenen Höhen ist nämlich die Luft schon außerordentlich dünn. Wenn nun eine Schallwelle bis dort hinauf gelangte, so wird ihre Amplitude bestimmt nicht zugenommen haben, die bewegte Masse ist aber sehr gering; die Schallenergie kann also dort auch nur einen sehr niedrigen Wert haben. Die so geschwächte Welle erleidet natürlich auch beim Absteigen weitere Verluste und kann auf keinen Fall mehr stark genug sein, um neben dem mehr horizontal ausgebreiteten Schall gehört zu werden.

Hier bloß einige Zahlen, die ich an anderen Stellen — die allerdings in physikalischen Kreisen weniger gelesen werden —[1]) errechnete: im allergünstigsten Fall kann ein aus 50 km Höhe herabkommender Schallstrahl nur $^1/_{1100}$ derjenigen Energie besitzen, welche ein horizontal in gleichförmiger Dichte ausgebreiteter nach Durchlaufen desselben Weges (direkter Schallstrahl) noch hätte. Wäre die Umkehr in 100 km Höhe erfolgt[2]), dann hätte sich sogar nur weniger als $^1/_{300\,000}$ ergeben. Alle übrige Energie, im ersten Fall $^{1099}/_{1100}$, im zweiten etwa $^{299\,999}/_{300\,000}$ der gesamten, wäre den unteren Schichten in irgendeiner Form erhalten geblieben. Das Mißverhältnis wird noch stärker, wenn man — wie es wahrscheinlich den Tatsachen entspricht — annimmt, daß die Schallwelle beim Herabsteigen dieselbe verhältnismäßige Schwächung erfährt, wie beim Aufsteigen. Dann sollte das Gebiet abnormer Hörbarkeit von weniger als dem millionsten Teil, bzw. 12 Billionstel der Ausgangsenergie aus erzeugt sein![3]) In anderer Darstellung würden die vier gebrachten Fälle lauten: am Innenrand des Außengebietes hätte ein an der Wasserstoffsphäre abgebogener Schallstrahl dieselbe Energie, wie sie ein direkter (d. h. allseitig in gleichdichter Luft ausgebreiteter) Schallstrahl erst in 6000 oder 100000 km, bzw. wenn auch beim Absteigen Schwächung angenommen wird, in mehr als 100000 oder 160000000 km Entfernung von der Schallquelle hätte! Diese praktisch natürlich unsinnigen Zahlen dürften doch wohl genug bezeichnend erscheinen!

---

1) Diese Entfernungen hängen nicht von der Schallstärke der Explosion ab, was natürlich für den Außenrand des Innengebietes um die Quelle herum nicht der Fall wäre.

2) Die letzte ausführlichere, nur zu theoretische Ableitung dafür dürfte die von Fujiwhara sein (Bull. Centr. Met. Obs. Japan **2**, No. 1, 1912). Sie berücksichtigt auch das Temperaturgefälle, ist darin allgemeiner als V. Kommerells Darstellung. Im übrigen wäre es für praktische Anwendungen viel besser, statt die Bahnen der Schallstrahlen für einfache Bedingungen exakt durchzurechnen, lieber die beste und einfachste Annäherung, etwa durch Kreisbogen, abzuleiten. Für das Temperaturgefälle besteht schon solche, für Windwirkung aber noch nicht; die von G. Jäger gegebene bezieht sich auch nur auf besondere Bedingungen, ist nicht allgemein anwendbar.

1) Meteorolog. Zeitschrift **32**, 266, 1915; ebenda 33, 1916; vgl. auch Naturwissensch. **2**, 925, 1914.

2) A. Wegener nimmt als Umkehrhöhe der Hauptstrahlen beiläufig 70 km an, van Everdingen mit geänderten Ausgangswerten etwa 110 km.

3) Das steht auch in schärfstem Widerspruch mit dem Flächeninhalt der Gebiete: in dem Wiener-Neustädter Fall hatte z. B. das Außengebiet etwa den doppelten Flächeninhalt des Innengebietes!

Schon diese rohe, mit durchaus günstigen Annahmen durchgeführte Überschlagsrechnung beweist, daß die scheinbar bestechende Theorie eines Herabbiegens der Schallstrahlen an der Wasserstoffsphäre für den Physiker vollkommen ausscheidet, wenn die beobachtete Hörbarkeit erklärt werden soll. Man wird dafür vielmehr, wie schon de Quervain getan, vornehmlich auf Wind und Temperatur zurückgehen müssen, beides Bedingungen, die nicht nur in der Vertikalen, sondern auch in der Horizontalen[1]) genug Verschiedenheiten zeigen. Daß es vorläufig noch schwer fällt, einen besonderen Fall daraufhin durchzurechnen, beruht nicht nur auf den von Fr. Nölke aufgewiesenen Schwierigkeiten, sondern mehr noch auf unserer Unkenntnis der Verhältnisse in den höheren Luftschichten. Vielleicht lassen sich aber einmal umgekehrt gerade diese aus Beobachtungen der Hörbarkeit erschließen.

1) So wichtig gerade dies ist, so wurde doch noch nie darauf hingewiesen.

Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

(Eingegangen 28. Juni 1916.)

Über thermodynamische Maschinen, die unter Mitwirkung der Schwerkraft arbeiten [1]).

I. Teil.

Von V. Bjerknes.

1. Die Carnotsche Maschine, mit deren Hilfe man den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ableitet, arbeitet ganz unabhängig von der Schwerkraft. Auch die gewöhnlichen technischen Wärmemaschinen sind ihrem Prinzipe nach von der Schwerkraft unabhängig, obgleich sie im Schwerkraftfelde arbeiten. Man kann aber auch Wärmemaschinen angeben, deren Arbeitsleistung ganz auf der Schwerkraft beruht. Um ein Beispiel zu geben: Eine Metallscheibe ist auf einer horizontalen Achse montiert und man sorgt für solche Wärmezu- und -abfuhr, daß die linke Hälfte der Scheibe immer eine höhere, die rechte immer eine niedrigere Temperatur hat. Wegen der thermischen Ausdehnung wird dann die Schwerkraft die erwärmte Hälfte mit größerem, die abgekühlte mit kleinerem Drehungsmoment angreifen. Die Scheibe wird sich drehen und kann eine gewisse Arbeit leisten, solange der angegebene Temperaturzustand durch passende Zu- und Abfuhr von Wärme unterhalten wird.

1) Im Auszug aus Bd. XXXV, No. 1 der Abh. der math.-phys. Klasse der kgl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch.

Eine Bedeutung für technische Arbeitsleistung haben Maschinen dieser Art nicht gehabt. In der Natur existieren aber solche Maschinen größten Stils. Die atmosphärischen und ozeanischen Bewegungen entstehen in letzter Hand durch die verschiedene Wirkung der Schwerkraft auf verschieden temperierte Massen.

Um einen Einblick in die Arbeitsweise dieser gewaltigen und äußerst komplizierten Maschinen zu gewinnen, empfiehlt es sich, einen ähnlichen Weg einzuschlagen wie den Carnotschen. In Gedanken konstruiert man die denkbar einfachste Idealmaschine, deren Arbeit auf Wärme und Schwerkraft beruht, und sucht an Hand derselben die allgemeinen Gesetze aufzudecken, nach denen nicht bloß die Idealmaschine selbst, sondern jede Maschine dieser Art arbeitet.

2. Bau der Maschine. — In der Carnotschen Maschine bringt man den arbeitenden flüssigen oder gasförmigen Körper in einen Zylinder unter einen Kolben. Statt dessen füllen wir ihn in eine in sich zurücklaufende Röhrenleitung. Weiter führen wir die beiden Carnotschen Wärmereservoire I und II ein, die an passenden Stellen der Röhre angebracht sind und dabei, je nach Belieben, in thermische Verbindung mit dem arbeitenden Körper gebracht oder von demselben thermisch isoliert werden können.

Die Form der in sich zurücklaufenden Röhrenleitung ist belanglos. In der Fig. 1 besteht sie

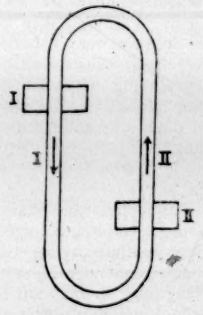


Fig. 1.

aus zwei geradlinigen vertikalen Röhrenschenkeln I und II, die oben und unten durch bogenförmige Röhren verbunden sind. Die Wärmebehälter I und II sind auf den Röhren I und II verschiebbar angebracht, und können auch längs der bogenförmigen Verbindungsröhren verschoben werden.

Die Bewegung, die durch die Röhre I nach oben und durch II nach unten geht, werden wir

die Vorwärtsbewegung der arbeitenden Substanz nennen, die entgegengesetzte die Rückwärtsbewegung.

Was die Eigenschaften des arbeitenden Körpers betrifft, so ist nur das eine wesentlich, daß er bei Temperaturveränderung sein Volumen ändern soll. Der Einfachheit halber nehme ich an, daß er sich thermisch normal verhält, sich also bei Temperaturerhöhung ausdehnt. Ein jeder sieht leicht ein, wie die unten abgeleiteten Resultate zu modifizieren sind, wenn es sich um einen thermisch abnormen Körper wie Wasser zwischen 0^0 C und 4^0 C handelt.

Bei allen Wärmemaschinen kommen Verluste vor, teils mechanischen, teils thermischen Ursprungs. Zu theoretischen Zwecken kann man sich aber den Grenzfall erreicht denken, wo alle Verluste auf Null herabgedrückt sind. Über die konstruktiven Bedingungen, die von einer konkreten Maschine zu einer verlustlosen Idealmaschine führen, gestatte ich mir auf die ausführlichere Abhandlung hinzuweisen. Hier denke ich mir einfach die verlustlose Maschine gegeben in der für die theoretischen Überlegungen zweckmäßigsten Form. Sie wird dann schematisch durch die folgenden Fig. 2 und 3 dargestellt und hat die folgenden wesentlichen Merkmale:

Wenn die arbeitende Substanz an dem Niveau I vorbeiströmt, nimmt sie die Temperatur des Wärmebehälters I an, wenn sie an dem Niveau II vorbeiströmt, nimmt sie die Temperatur des Wärmebehälters II an. Unterwegs von dem einen Wärmebehälter zum anderen durchläuft die Substanz nur adiabatische Prozesse.

3. Die Wirkung einer einzigen Wärmequelle. — Zu Anfang soll adiabatische Temperaturverteilung herrschen. Die absolute Temperatur ϑ wird dann als Funktion der Höhe durch eine Gleichung

$$\vartheta = f(z) \qquad \text{(a)}$$

gegeben sein.

Ist die Temperatur des Wärmebehälters I auch durch diese Gleichung gegeben, so wird derselbe keinen Einfluß auf den Gleichgewichts- oder Bewegungszustand der Flüssigkeit ausüben können, gleichgültig, ob man auf Isolation oder auf thermische Verbindung einstellt. Jetzt soll er aber eine etwas höhere Temperatur

$$\vartheta + \Delta\vartheta \qquad \text{(b)}$$

haben. Steht er dann ganz oben, so wird nur folgen, daß das oberste Flüssigkeitselement erwärmt wird, so daß das indifferente Gleichgewicht in ein stabiles verwandelt wird. Steht er tiefer, wird folgendes eintreten. Das in dem Behälter enthaltene Element wird erwärmt und steigt in die Höhe; das nachfolgende wird erwärmt usw., und es erhebt sich eine immer länger werdende erwärmte Flüssigkeitssäule von dem Behälter. Je mehr sich diese Säule verlängert, um so größer wird das Übergewicht der entsprechenden kalten Säule im gegenüberliegenden Teil II der Röhre, und um so stärker die Kraft, die die Zirkulation beschleunigt. Das Übergewicht erreicht sein Maximum, wenn die Spitze der erwärmten Säule den obersten Scheitelpunkt der Röhrenleitung erreicht hat, nimmt wieder ab bei der jetzt folgenden Verlängerung der erwärmten Säule abwärts durch den Teil II der Röhrenleitung, und wird Null, wenn die Spitze der Säule das Niveau des Wärmebehälters wieder erreicht. Während dieser ganzen ersten Phase ist die Zirkulationsbewegung beschleunigt worden. Wegen der Trägheit setzt sich die Bewegung fort und die erwärmte Säule verlängert sich unterhalb des Niveaus des Wärmebehälters I. Dabei entwickelt sich eine verzögernde Kraft in genau ähnlicher Weise wie früher die beschleunigende. Sofern dadurch nicht schon früher Umkehr eintritt, wird während dieser zweiten Phase das verzögernde Übergewicht zunehmen, bis die erwärmte Säule den unteren Scheitelpunkt der Röhrenleitung erreicht hat, dann wieder abnehmen und Null werden im Moment, wo die erwärmte Säule von unten den Wärmebehälter erreicht und somit die ganze Flüssigkeitsmasse die erhöhte Temperatur erhalten hat.

Drei Möglichkeiten bieten sich jetzt dar.

Liegt der Wärmebehälter oberhalb eines gewissen mittleren Niveaus, so wird die in der zweiten Phase sich entwickelnde Gegenkraft genügen, um die Bewegung zur Umkehr zu bringen. Schwingungen stellen sich dann ein, und von dem Moment der ersten Umkehr an ist jede weitere Wirkung des Wärmebehälters ausgeschaltet. Die Partikelchen, die von diesem Moment an durch ihn passieren, gehören schon der erwärmten Säule an.

Befindet sich der Wärmebehälter in einem gewissen mittleren Niveau, so wird die Gegenkraft während der zweiten Phase der Bewegung eben hinreichen, um die Bewegung zum Stillstand zu bringen in dem Moment, wo die erwärmte Säule von unten den Wärmebehälter erreicht. Nach einem vollen Umlaufe ist dann jedes Partikelchen zu seiner Anfangslage zurückgekommen und das indifferente Gleichgewicht wieder hergestellt. Der einzige Unterschied ist, daß die Temperatur um den Betrag $\Delta\vartheta$ erhöht worden ist.

Liegt endlich die Wärmequelle unterhalb des definierten kritischen Niveaus, so wird das sich entwickelnde Gegengewicht während der zweiten Phase der Bewegung nicht genügen, um die Bewegung zum Stillstand zu bringen. Eine gewisse Geschwindigkeit wird noch vorhanden sein im Momente, wo die erwärmte Säule den Wärme-

behälter erreicht. Von diesem Moment an sind weder verzögernde noch beschleunigende Kräfte mehr vorhanden. Mit der in diesem Momente vorliegenden Geschwindigkeit wird die Flüssigkeit unveränderlich weiter zirkulieren. Mit der weiteren Verlegung des Wärmebehälters nach unten wird offenbar immer größere Intensität der gebildeten dauernden Zirkulation folgen.

Wie die Resultate zu modifizieren sind, wenn von Anfang an eine Zirkulation vorliegt, sieht man leicht ein. Ich hebe nur das folgende hervor. Geht die Anfangszirkulation rückwärts, d. h. durch den Wärmebehälter I nach unten, so werden sich beim Einschalten dieses Behälters anfänglich verzögernde Kräfte entwickeln. Drei Möglichkeiten bieten sich dann dar. Die verzögernden Kräfte können Umkehr der Bewegung erzwingen. Oder die arbeitende Substanz kann zur Ruhe kommen im toten Punkt, wenn die erwärmte Säule den ganzen unteren Röhrenbogen unterhalb des Niveaus des Behälters I füllt. Oder die Bewegung kann sich am toten Punkt vorbei fortsetzen, und es ergibt sich eine dauernde rückläufige Zirkulation.

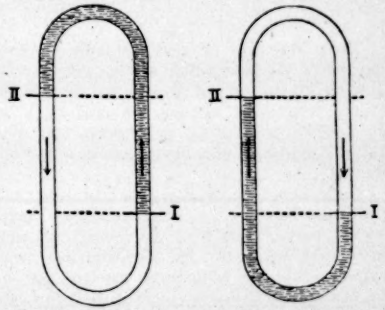
Eine stetig arbeitleistende Maschine ergibt sich aber nicht, solange nur eine Quelle tätig ist. Wenn die Bewegung oder die Bewegungsänderung, für welche die Bedingungen vorliegen, erzeugt sind, fällt jedes weitere Eingreifen der Wärmequelle oder der Kältequelle von selbst fort.

Der einzige Ausweg, weitere Arbeitsleistung zu erzielen, wäre, die Temperatur der Wärmequelle zu erhöhen. Sofern man über eine Wärmequelle mit stetig steigender Temperatur verfügt, kann man unsere Maschine mittels einer Wärmequelle treiben.

4. Stetiger Betrieb mit zwei Wärmequellen. — Jetzt soll auch die Wärmequelle II eingeschaltet werden, und eben die Normaltemperatur 3 (a) ihres Niveaus haben. Wir werden dann drei Fälle zu betrachten haben.

I. Die Kältequelle II liegt höher als die Wärmequelle I. — Herrscht Gleichgewicht zur Zeit, wo man die thermische Verbindung herstellt, so nimmt die bewegende Kraft erst zu, bis die warme Flüssigkeitssäule den obersten Punkt der Röhrenleitung erreicht hat, und dann wieder ab, bis die warme Säule die Kältequelle erreicht. Die Kältequelle setzt jedem weiteren Anwachsen der warmen Säule ein Ende, und in bezug auf Temperatur tritt ein Dauerzustand ein. Der obere Röhrenbogen oberhalb beider Wärmebehälter bleibt mit der höher temperierten, der untere Bogen unterhalb der beiden Behälter mit normal temperierter Flüssigkeit gefüllt (Fig. 2a).

Die dynamischen Folgen dieser Temperaturverteilung leuchten gleich ein. Durch zwei Niveauebenen, eine durch die Wärmequelle und eine durch die Kältequelle, kann man die Röhrenleitung in drei Teile teilen. Im obersten Röhrenbogen, oberhalb des Niveaus der Kältequelle, halten sich alle bewegenden Kräfte das Gleichgewicht. Im untersten Röhrenbogen, unterhalb des Niveaus der Wärmequelle, ist dasselbe der Fall. Zwischen den beiden Niveauflächen hat man aber zwei verschieden temperierte Flüssigkeitssäulen. Der konstante Dichteunterschied dieser beiden Flüssigkeitssäulen liefert eine konstante bewegende Kraft. Für jedes bewegte Partikelchen wird diese Kraft für jeden vollen Umlauf in der Röhrenleitung dieselbe konstante Arbeit ausführen. Summieren wir für



a) Vorwärtslauf (arbeitleistend). b) Rückwärtslauf (arbeitleistend).

Fig. 2. Die Kältequelle II liegt höher als die Wärmequelle I.

alle Partikelchen der arbeitenden Substanz, so ergibt sich: Für jeden Umlauf der arbeitenden Substanz in der Röhrenleitung wird eine konstante Arbeit geleistet, und für jeden Umlauf nimmt also die kinetische Energie der arbeitenden Substanz um den entsprechenden Betrag zu. Es ergibt sich also eine stetige Verwandlung der zugeführten Wärme in kinetische Energie.

Liegt eine vorwärtsgerichtete Anfangszirkulation vor, so ändert sich an dem oben Entwickelten nichts. Bei rückläufiger Anfangszirkulation wird man dagegen wieder drei Möglichkeiten begegnen.

Umkehr kann eintreten, ehe der tote Punkt erreicht ist; die Vorwärtsbewegung stellt sich dann wie vorher ein. Oder die Bewegung kommt zum Stillstand im toten Punkt, wenn die erwärmte Flüssigkeitssäule den Röhrenbogen unterhalb des Niveaus der Wärmequelle füllt. Oder die Bewegung geht am toten Punkt vorbei, die erwärmte Säule verlängert sich unter Beschleunigung weiter nach oben und erreicht den Wärmebehälter II, der jetzt ihrem weiteren Anwachsen ein Ende setzt. Jetzt ist wieder ein

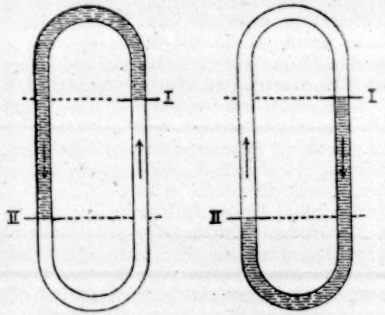
Dauerzustand in bezug auf die Temperaturverteilung erreicht, aber ein anderer als früher: der Bogen unterhalb des Wärmebehälters enthält jetzt die höher temperierte, der Bogen oberhalb der Behälter die normal temperierte Flüssigkeit (Fig. 2b). Das bewegende Übergewicht beruht genau wie vorher auf dem Dichteunterschied zwischen den zwei Flüssigkeitssäulen, die oben und unten durch die Niveauebenen durch die Wärmebehälter begrenzt sind. Nur haben erwärmte und die normal temperierte Säule den Platz gewechselt: die erwärmte steht unterhalb der Kältequelle und die normal temperierte oberhalb der Wärmequelle. Sie bedingen eine konstante, nach rückwärts bewegende Kraft, und bei der Rückwärtsbewegung erhält man für jeden Umlauf gleichviel kinetische Energie erzeugt wie bei der Vorwärtsbewegung.

Diese Maschine arbeitet also beim Vorwärts- und beim Rückwärtslauf genau gleich. Der Unterschied ist nur, daß sich die Vorwärtsbewegung von selbst einstellt, während man, um die Rückwärtsbewegung zu erzielen, eine rückläufige Anfangszirkulation von genügender Stärke braucht.

II. Wärme- und Kältequelle liegen in gleichem Niveau. — Wenn anfänglich Gleichgewicht herrscht, so wird die Bewegung genau wie vorher anfangen. Im Momente, wo die erwärmte Säule die Kältequelle erreicht, ist aber das bewegende Übergewicht eben Null geworden und wird von jetzt an Null bleiben. Da die vorausgehende Periode ausschließlich eine Periode der Beschleunigung war, wird eine von Null verschiedene konstante Geschwindigkeit vorliegen, die sich nicht mehr ändert. Man hat eine konstante Zirkulation, bei der der Bogen oberhalb des gemeinschaftlichen Niveaus beider Wärmebehälter die erhöhte, der Bogen unterhalb desselben Niveaus die normale Temperatur hat. Dabei wird stetig Wärme von dem Wärmebehälter I zu II übergeführt, aber nach dem Eintreten des Dauerzustandes keine Wärme in Arbeit verwandelt.

Liegt in diesem Falle eine vorwärtsgerichtete Anfangszirkulation vor, so wird der ganze Unterschied, daß die im nachher folgenden Dauerzustand auftretende Zirkulation entsprechend stärker wird. Hat dagegen die Anfangszirkulation die entgegengesetzte Richtung, so hat man wieder drei Möglichkeiten zu unterscheiden. Die Bewegung kehrt um, ehe der tote Punkt erreicht ist, und das Resultat wird dasselbe, als hätte von Anfang an eine Zirkulation von der zuerst betrachteten Richtung vorgelegen. Oder der tote Punkt wird eben erreicht, und alles kommt zum Stillstand in der instabilen Lage, wo der Bogen unterhalb des Niveaus beider Behälter mit höher temperierter und der Bogen oberhalb mit normal temperierter Flüssigkeit gefüllt ist. Oder endlich, die Bewegung kommt an dem toten Punkt vorbei, um sich von da an mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit fortzusetzen, die schwächer ist als die Anfangsgeschwindigkeit.

III. Die Kältequelle liegt tiefer als die Wärmequelle. — Geht man wieder von einem Zustande des Gleichgewichtes aus, so setzt die Bewegung wie früher ein. Ehe aber die erwärmte Säule die Kältequelle erreicht, fangen die verzögernden Kräfte an sich zu entwickeln. Diese können die Umkehr der Bewegung erzwingen, ehe die erwärmte Säule die Kältequelle erreicht, und dann stellen sich Schwingungen ein. Oder die erwärmte Säule erreicht die Kältequelle, die ihrem weiteren Anwachsen eine



a) Vorwärtslauf (arbeitvernichtend). b) Rückwärtslauf (arbeitvernichtend).

Fig. 3. Die Kältequelle II liegt tiefer als die Wärmequelle I.

Grenze setzt (Fig. 3a). Von diesem Moment an geht dann die Bewegung gegen eine konstante Gegenkraft, die früher oder später Umkehr mit darauffolgenden Schwingungen erzwingen wird. Die Ausschläge dieser Schwingungen sind gegeben durch den Vertikalabstand der zwei Wärmebehälter.

Liegt eine vorwärtsgerichtete Anfangszirkulation vor, so wird sich das oben Beschriebene genau wiederholen: Die kinetische Energie der zirkulierenden Flüssigkeit erschöpft sich gegen die konstante Gegenkraft, und dann stellen sich die Schwingungen ein. Ist die Anfangszirkulation rückläufig, so kann nie der früher auftretende tote Punkt erreicht werden. Denn ehe sich die Säule so weit entwickeln kann, erreicht sie die Kältequelle, die ihre weitere Verlängerung verhindert. Man hat deshalb nur zwei Möglichkeiten zu betrachten. Die Bewegung kann um-

kehren, ehe die warme Säule die Kältequelle erreicht, und nach dieser Umkehr folgen die früher beschriebenen Erscheinungen. Oder die Kältequelle wird erreicht (Fig. 3b). Dann tritt eine Periode ein, wo die Bewegung gegen eine konstante Gegenkraft verläuft. Wie stark auch die Anfangszirkulation war, wird in dieser Weise die Bewegung früher oder später zur Umkehr gebracht, wonach wieder alles wie oben beschrieben verläuft. Das Hauptergebnis bleibt immer dasselbe: Wenn die Wärmequelle höher als die Kältequelle liegt, vernichtet die Maschine die kinetische Energie der arbeitenden Substanz, um sie in Wärme zu verwandeln. Dies tritt sowohl bei vorwärts- als bei rückwärtsgehender Zirkulation ein, und das Endergebnis bleibt eine schwingende Bewegung, bei der Wärme- und Kältequelle außer Spiel gesetzt sind, weil sie nur mit arbeitender Substanz ihrer eigenen Temperatur in Berührung kommen.

5. Die mechanische Arbeitsleistung der Maschine. — In der Maschine tritt eine konstante bewegende Kraft auf. Für jeden vollen Umlauf der arbeitenden Substanz in der Röhrenleitung leistet diese Kraft eine gewisse Arbeit. Diese Arbeit ist positiv und vergrößert die kinetische Energie der arbeitenden Substanz, wenn die Kältequelle höher als die Wärmequelle liegt, sie ist negativ und vermindert die kinetische Energie der arbeitenden Substanz, wenn die Kältequelle niedriger als die Wärmequelle liegt.

Die arbeitende Kraft ist proportional der Höhe der Kältequelle über der Wärmequelle. Sie kann als negativ oder arbeitvernichtend definiert werden, wenn diese Höhe negativ ist und also die Kältequelle niedriger als die Wärmequelle liegt. Weiter ist die Kraft proportional dem Dichteüberschuß der normal temperierten Flüssigkeitssäule über der erwärmten.

Offenbar bieten sich zwei Wege dar, um erhöhte Arbeitsleistung pro Umlauf zu erzielen: die Höhe der Kältequelle über der Wärmequelle zu vergrößern oder den Temperaturunterschied zwischen der erwärmten und der normal temperierten Flüssigkeitssäule zu vergrößern, d. h. die Temperatur der Wärmequelle zu erhöhen. Für die Wirkung, die man durch den Temperaturunterschied der zwei Flüssigkeitssäulen erzielt, ist die thermische Ausdehnung des Stoffes maßgebend. Günstig ist insofern die Anwendung von Gasen. Am kräftigsten wird jedoch eine Maschine selbst mäßiger Dimensionen wirken können und vielleicht sogar technisch verwendbar sein, wenn man die Temperaturen so wählt, daß die arbeitende Substanz in dem einen Röhrenschenkel als Dampf aufsteigt und in dem anderen als Flüssigkeit heruntersinkt. Jedenfalls ist es klar, daß man durch die Wahl genügender Höhenunterschiede und genügender Temperaturunterschiede der Wärmequellen, durch passende Wahl der sonstigen Dimensionen sowie durch die Wahl einer zweckmäßig arbeitenden Substanz eine Maschine bauen kann, die pro Umlauf oder pro Zeiteinheit beliebig viel Arbeit leistet.

6. Die thermodynamische Nutzwirkung der Maschine. — Wichtiger als die Arbeitsleistung pro Umlauf oder pro Zeiteinheit ist jedoch die Frage der Ökonomie der Maschine, d. h. die thermodynamische Frage nach der Arbeitsleistung pro Einheit zugeführter Wärme.

Da jedes Partikelchen der arbeitenden Substanz für jeden Umlauf einen Kreisprozeß durchläuft, kann man diese thermodynamische Nutzwirkung ganz allgemein angeben, gleichgültig, welche die arbeitende Substanz ist. Um gleich die Bedingungen der Höchstleistung vor uns zu haben, führen wir eine besondere Bedingung ein. Über die Größe des Temperaturüberschusses $\Delta\vartheta$ der Wärmequelle über der normalen Temperatur der arbeitenden Substanz in dem gleichen Niveau haben wir bisher keine Voraussetzungen gemacht. Wir haben nur darauf hingewiesen, daß man durch Vergrößerung dieses Temperaturüberschusses größere Arbeitsleistung der Maschine pro Umlauf erhält. Für die thermodynamische Nutzwirkung der Maschine wird aber die Vergrößerung dieses Temperaturüberschusses nur schädlich sein. Will man ohne Verlust von thermodynamischer Nutzwirkung mit großer Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ zwischen der kalten und der warmen Flüssigkeitssäule arbeiten, so ist der einzige Ausweg, daß man eine ganze Reihe von Wärmequellen einführt mit Temperaturen zwischen ϑ und $\vartheta + \Delta\vartheta$, die nacheinander in Tätigkeit treten, so daß eine Überführung von Wärme nie mit einer endlichen Temperaturerniedrigung verbunden ist. Dabei gehen wir aber zu Maschinen komplizierteren Baues über. Die einfachste und deshalb grundlegende Maschine höchster Leistung ergibt sich, wenn man den Temperaturüberschuß $\Delta\vartheta$ verschwindend klein annimmt.

Indem ich diese Voraussetzung mache, nenne ich beziehungsweise ϑ_{I} und ϑ_{II} die Temperaturen der Wärmequelle und der Kältequelle und verfolge die Geschichte eines Partikelchens der arbeitenden Substanz. Bei der Temperatur ϑ_{I} erhält das Partikelchen eine gewisse Wärmemenge dq_{I} von der Wärmequelle. Darauf erleidet es ausschließlich adiabatische Veränderungen, bis es mit der Temperatur ϑ_{II} bei der Kältequelle ankommt. Hier gibt es eine gewisse Wärmemenge dq_{II} ab, und dann folgen wieder adiabatische Veränderungen, bis das Partikel-

chen mit der Temperatur ϑ_{I} wieder die Wärmequelle I erreicht. Der Kreisprozeß ist also einfach der Carnotsche. Die Nutzwirkung ist das Verhältnis der als Wärme verschwundenen und in mechanische Arbeit übergeführten Wärmemenge $dq_{\mathrm{I}} - dq_{\mathrm{II}}$ zu der vom Wärmebehälter abgegebenen Wärmemenge dq_{I}. Dieser Nutzeffekt ist, nach den Prinzipien der Thermodynamik, von der physikalischen Natur der arbeitenden Substanzen unabhängig und gleich der Verhältniszahl des Temperaturunterschiedes der beiden Wärmebehälter zu der absoluten Temperatur der Wärmequelle

$$\frac{\vartheta_{\mathrm{I}} - \vartheta_{\mathrm{II}}}{\vartheta_{\mathrm{I}}}. \qquad (a)$$

Dies gilt für jedes Element der arbeitenden Substanz. (a) ist also der Effekt der ganzen Maschine. Von jeder endlichen oder unendlich kleinen Wärmemenge, die bei dem stetigen Betriebe der Maschine zugeführt wird, wird der Bruchteil (a) in mechanische Arbeit umgesetzt. Oder, wenn es sich um den stetigen Betrieb handelt, können wir sagen: von der der Maschine pro Zeiteinheit zugeführten Wärmemenge wird der Bruchteil (a) in kinetische Energie umgesetzt.

Dieses Resultat zeigt, von den Prinzipien der Thermodynamik aus, warum der Höhenunterschied der Wärmequellen so entscheidend für die Leistung der Maschine ist. Der Niveauunterschied ist notwendig, um den Temperaturunterschied zu schaffen, welcher Voraussetzung für die Arbeitsleistung einer Wärmemaschine ist. Die Formel gilt für alle Substanzen, welches auch ihre thermischen Eigenschaften sind. Sie zeigt, daß man bei thermisch normalen Substanzen, die sich bei Erwärmung ausdehnen und bei adiabatischem Gleichgewicht abnehmende Temperatur mit der Höhe haben, eine arbeitleistende Maschine erhält, wenn die Kältequelle höher als die Wärmequelle liegt, und eine arbeitvernichtende, wenn die Kältequelle niedriger als die Wärmequelle liegt. Ebenfalls zeigt sie, daß sich alles umkehrt bei den thermisch abnormen Substanzen, die sich bei Erwärmung zusammenziehen und bei adiabatischem Gleichgewicht aufwärts zunehmende Temperatur haben. Bei diesen gibt hochgelegene Kältequelle und niedriggelegene Wärmequelle eine arbeitvernichtende, hochgelegene Wärme- und niedriggelegene Kältequelle eine arbeitleistende Maschine.

Um ein quantitatives Beispiel der Wirkung des Niveauunterschiedes von Wärme- und Kältequelle zu geben, können wir trockene atmosphärische Luft betrachten und der Wärmequelle die Temperatur 0^0 C geben. Liegt dann die Kältequelle 1 m höher als die Wärmequelle, so hat sie nach dem adiabatischen Gesetz die Temperatur $-0{,}01^0$ C. Dann wird $\frac{1}{27300}$ der zugeführten Wärme in kinetische Energie verwandelt. Gibt man der Kältequelle die Höhen 10, 100, 1000, 10000 m über der Wärmequelle, so erhöht sich die Nutzwirkung beziehungsweise auf $\frac{1}{2730}$, $\frac{1}{273}$, $\frac{1}{27{,}3}$, $\frac{1}{2{,}73}$. Schließlich wird sich die Nutzwirkung dem idealen Grenzwert 1 nähern, wenn sich die Höhe der Kältequelle über der Wärmequelle 27300 m nähert, so daß sich die Maschine der vollen Höhe der adiabatischen Atmosphäre nähert. An die Grenze darf man natürlich nur gehen, vorausgesetzt, daß die atmosphärische Luft ihre idealen Gaseigenschaften bis zu dem absoluten Nullpunkt beibehält. Geht man an die Grenze, so wäre schließlich die Kältequelle nicht mehr notwendig. Denn an sie sollte nur eine Wärmemenge Null abgeführt werden. Die ganze unten zugeführte Wärmemenge würde bei dieser Höhe der Röhrenleitung sowieso vollständig in kinetische Energie verwandelt werden.

Geht man zu Stoffen mit anderen adiabatischen Gradienten, so ändern sich die Höhenunterschiede, die erforderlich sind, um einen bestimmten Wirkungsgrad zu erzielen. Bemerkenswert in dieser Verbindung ist, daß der adiabatische Temperaturgradient der gesättigt feuchten atmosphärischen Luft erheblich kleiner als der der trockenen ist. Bei der Anwendung solcher Luft als arbeitender Substanz in unserer Maschine muß man größere Höhenunterschiede zwischen Wärme- und Kältequellen haben, um gleiche Arbeitsproduktion wie mit trockener Luft zu erhalten. Vorausgesetzt ist dabei, daß das ausgeschiedene Wasser im Kreislauf mitgeführt wird und nicht als Regen herunterfällt.

Wendet man reines Wasser als arbeitende Substanz an, so hat man es mit außerordentlich kleinen vertikalen Temperaturgradienten zu tun, die bei 4^0 C Null werden und das Vorzeichen ändern. Um mit Wasser als arbeitender Substanz größere Nutzwirkung zu erreichen, müßte man also zu außerordentlich großen Höhenunterschieden zwischen Wärme- und Kältequelle greifen, und wenn man die Temperatur des Dichtemaximums passierte, würde der notwendige Höhenunterschied von $+\infty$ zu $-\infty$ überspringen. Das Meerwasser verhält sich für alle Temperaturen oberhalb seines Gefrierpunktes wie das reine Wasser oberhalb 4^0 C. Der Temperaturgradient ist aber so klein, daß man nach Ekman[1]) eine Temperaturerniedri-

1) V. Walfrid Ekman, On the use of insulated

gung von nur 1,3 oder 1,4° C erhielte, wenn man eine Wasserprobe mit einer Anfangstemperatur zwischen 0° und 4° von den größten Meerestiefen von beinahe 10000 m zu der Meeresoberfläche in einem vollständig wärmeisolierenden Wasserschöpfer heraufholen wollte. Mit Meerwasser als arbeitender Substanz in einer Röhrenleitung von dieser Höhe würde man also eine Nutzwirkung von nur $\frac{1}{200}$ haben.

(Teil II folgt.)

water-bottles and reversing thermometers p. 7. Conseil permanent international pour l'Exploration de la Mer. Publication de Circonstance Nr. 23. Kopenhagen 1905.

(Eingegangen 13. Juli 1916.)

Über die Extinktion des Lichtes. II.

Von C. W. Oseen.

Ich habe kürzlich in dieser Zeitschrift (17, 233, 1916) nachgewiesen, daß wenn man die elektromagnetische Theorie der Dispersion des Lichtes in der Planckschen Form annimmt, man für den Extinktionskoeffizienten nicht den Rayleighschen Wert:

$$\frac{32\pi^3(\mu-1)^2}{3N\lambda^4},$$

sondern den doppelten Wert erhält. Da dieses Ergebnis mit den Tatsachen in Widerspruch zu stehen scheint und da ich damals glaubte, daß die Plancksche Dispersionstheorie im Einklang mit den Maxwellschen Gleichungen stehe, so wurde ich zu der Auffassung gedrängt, daß die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik die tatsächlich beobachtete Extinktion nicht zu erklären vermag. Ich habe seitdem erkannt, daß jener Glaube irrtümlich war, und daß der Widerspruch auf einen Fehler in der Planckschen Theorie der Dispersion des Lichtes zurückzuführen ist. Ich zeige in den folgenden Zeilen, daß Herr Planck das Dämpfungsglied eines Resonators richtig berechnet hat, daß aber die auf den Resonator wirkende Kraft nicht den von Herrn Planck angegebenen Betrag hat, sondern noch ein Glied enthält, das jenes Dämpfungsglied gerade aufhebt.

Der Einfachheit wegen nehme ich an, daß das dispergierende Mittel nur Molekeln von einer einzigen Art enthält. Mit jeder Molekel soll ein elektrischer Dipol verbunden sein. $\boldsymbol{f}$ sei das Moment eines Dipols. Die Schwingungsgleichung desselben ist dann:

$$m\left(\frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2}+k^2\boldsymbol{f}\right)-\frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3\boldsymbol{f}}{dt^3}=$$

$$=e^2\left(\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P{\sum}'\frac{\boldsymbol{f}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right).$$

Hier ist $\boldsymbol{E}_0$ die von außen einfallende äußere Kraft. Die Summe erstreckt sich über alle Dipole im Körper mit Ausnahme desjenigen, P, auf welchen sich das linke Glied bezieht.

Um P schlagen wir eine Kugel, deren Radius R im Verhältnis zur Wellenlänge klein, aber im Verhältnis zum durchschnittlichen Abstande zwischen zwei angrenzenden Molekeln groß ist. Wir setzen die Zahl der Molekel im Volumelemente $d\Omega = N\,d\Omega$. Wir setzen ferner:

$$N\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\psi}e^{i\omega t}$$

und nehmen an, daß $\boldsymbol{\psi}$ eine von t unabhängige, regelmäßig variierende und in physikalisch kleinen Gebieten konstante Vektorfunktion eines Punktes P' ist. Wir können dann leicht denjenigen Anteil der Funktion:

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P{\sum}'\frac{\boldsymbol{f}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

berechnen, der von dem außerhalb der Kugel $r=R$ gelegenen Teil des Körpers herrührt. Wir erhalten:

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int_{r>R}\boldsymbol{\psi}(P')\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\Omega_{P'}.$$

Wir haben:

$$\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}=-\frac{c^2}{\omega^2}\Delta_{P'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}$$

und erhalten folglich:

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int_{r>R}\boldsymbol{\psi}(P')\,\Delta_{P'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}\,d\Omega_{P'}=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int_{r>R}\Delta_{P'}\boldsymbol{\psi}(P')\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}\,d\Omega_{P'}-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int_S\left\{\boldsymbol{\psi}(P')\frac{d}{dn'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}-\right.$$

$$\left.-\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dn'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}\right\}d\sigma+\frac{1}{4\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int_{r=R}\left\{\boldsymbol{\psi}(P')\right.$$

$$\left.\frac{d}{dn'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}-\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dn'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}\right\}d\sigma,$$

wenn S die Oberfläche des Körpers ist und wenn die Normale stets nach außen gezogen wird.

Wir nehmen an, daß $\boldsymbol{\psi}$ der Bedingung:

$$\Delta\boldsymbol{\psi}+\frac{\omega^2}{9^2}\boldsymbol{\psi}=0$$

genügt. Wir nehmen ferner an, daß:

$$\boldsymbol{E}_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{c^2\mathfrak{g}^2}{\omega^2(c^2-\mathfrak{g}^2)}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P \int_S \left(\psi(P')\frac{d}{dn'} - \frac{d\psi}{dn'}\right)\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\sigma = 0.$$

Diese Annahme ist damit gleichbedeutend, daß die gewöhnlichen Randbedingungen erfüllt sind. Wir erhalten dann:

$$\boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P \int_{r\geq R} \psi(P')\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\Omega_{P'} =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{g}^2c^2}{\omega^2(c^2-\mathfrak{g}^2)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P \int_{r=R}\left(\psi\frac{d}{dn'} - \frac{d\psi}{dn'}\right)\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\sigma.$$

In meiner Abhandlung[1]): „Über die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Dipolen und über die Drehung der Polarisationsebene in Kristallen und Flüssigkeiten" habe ich den Grenzwert des rechten Gliedes für $R = 0$ berechnet. Ich will hier auch gewisse für $R = 0$ verschwindende Glieder in Betracht ziehen. Ich nehme an, daß $\mathfrak{g}$ und ω reelle Größen sind. Der Grenzwert des rechten Gliedes ist dann, vom Faktor $e^{i\omega t}$ abgesehen, ebenfalls reell. Ich berechne hier überdies die größten imaginären Glieder. Es ist:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\left(\psi\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\right) =$$

$$\left\{\psi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{r}}{r}\left(\psi\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right\}\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r} +$$

$$+\frac{\omega^2}{c^2}\psi\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}.$$

Ich erhalte demnach:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int_{r=R}\psi\frac{d}{dn}\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\sigma = \left\{\frac{4\pi}{5}\Delta\psi - \right.$$

$$\left. -\frac{12\pi}{5}\operatorname{grad}\operatorname{div}\psi - \frac{8\pi\omega^2}{3c^2}\psi + \frac{8\pi\omega i^5}{9c^5}R^3\psi\right\}e^{i\omega t}.$$

Ich erhalte ebenso:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int_{r=R}\frac{d\psi}{dn}\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\sigma = \left\{\frac{8\pi}{5}\operatorname{grad}\operatorname{div}\psi - \right.$$

$$\left. -\frac{8\pi}{15}\Delta\psi - \frac{8\pi i\omega^3}{9c^3}R^3\Delta\psi\right\}e^{i\omega t}.$$

Nach unserer Annahme ist:

$$\Delta\psi = -\frac{\omega^2}{\mathfrak{g}^2}\psi.$$

1) Ann. d. Phys. 48, 1915.

Wir wollen annehmen, daß überdies:

$$\operatorname{div}\psi = 0.$$

Wir erhalten dann:

$$\boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int_{r\geq R}\psi(P')\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\Omega_{P'} =$$

$$\frac{1}{3}\frac{2\mathfrak{g}^2+c^2}{c^2-\mathfrak{g}^2}\psi(P)e^{i\omega t} + \frac{2i\omega^3}{9c^3}R^3\psi(P)e^{i\omega t}.$$

Bei der Berechnung von:

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\sum_{r=R}'\psi(P')\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\Omega_{P'},$$

wollen wir annehmen, daß: $\psi_x = \psi_y = 0$. Wir beschränken uns überdies auf die Berechnung der z-Komponente. Wir erhalten:

$$\frac{\psi_z(P)}{4\pi N}\sum_{r<R}'\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{i\omega}{c}+1\right)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{3z^2}{r^4}\right)\right\}\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}.$$

In einem isotropen Körper ist $\overline{z^2} = \frac{1}{3}r^2$. Wir bekommen folglich:

$$\frac{\psi_z(P)}{4\pi N}\frac{2\omega^2}{3c^3}e^{i\omega t}\sum_{r<R}'\frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r}$$

oder, wenn wir nur die größten, vom Faktor $e^{i\omega t}$ abgesehen, imaginären Glieder berücksichtigen und da die Zahl der Glieder in unserer Summe:

$$\frac{4\pi R^3}{3}N - 1$$

ist:

$$-\frac{i\omega^3}{6\pi c^3 N}\left(\frac{1}{3}\cdot 4\pi R^3 N - 1\right)\psi_z(P)e^{i\omega t}.$$

Man findet in derselben Weise, daß in einem isotropen Körper ganz allgemein:

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\sum_{r<R}'\psi(P')\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\Omega_{P'} =$$

$$-\frac{i\omega^3}{6\pi c^3 N}\left(\frac{1}{3}\cdot 4\pi R^3 N - 1\right)\psi(P)e^{i\omega t}.$$

Wir haben also schließlich:

$$e^2\left(\boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\sum{}'f\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{3}\frac{2\mathfrak{g}^2+c^2}{c^2-\mathfrak{g}^2}e^2\psi(P)e^{i\omega t} + \frac{i\omega^3e^2}{6\pi c^3 N}\psi(P)e^{i\omega t} =$$

$$\frac{1}{3}\frac{2\mathfrak{g}^2+c^2}{c^2-\mathfrak{g}^2}Ne^2f(P) - \frac{e^2}{6\pi c^3}\left(\frac{d^3f}{dt^3}\right)_P.$$

Die Schwingungen des Resonators in P verlaufen also nach dem Gesetz:

$$m\left(\frac{d^2f}{dt^2}+k^2f\right)-\frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3f}{dt^3}=\frac{1}{3}\frac{2\vartheta^2+c^2}{c^2-\vartheta^2}Ne^2f-\frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3f}{dt^3}$$

oder:

$$m\left(\frac{d^2f}{dt^2}+k^2f\right)=\frac{1}{3}\frac{2\vartheta^2+c^2}{c^2-\vartheta^2}Ne^2f.$$

Das Plancksche Dämpfungsglied fällt weg.

Wenn wir:

$$Nf=P,\left(\frac{c^2}{\vartheta^2}-1\right)P=E$$

setzen, so können wir unser Ergebnis in dem folgenden Satze zusammenfassen: Die äußere Kraft, welche in einem isotropen Körper auf ein Elektron wirkt, ist im Mittel:

$$e\left(E+\frac{1}{3}P\right)-\frac{e}{6\pi c^3N}\frac{d^3P}{dt^3}.$$

Das letzte Glied hebt das Plancksche Dämpfungsglied auf.

Mit dem Planckschen Dämpfungsglied fällt auch die von mir so genannte Rayleigh-Plancksche Extinktion weg. Nur die Keesom-Einsteinsche Extinktion bleibt bestehen. In Übereinstimmung mit den Tatsachen und mit Herrn Lorentz bekommt man wieder den Rayleighschen Extinktionskoeffizienten:

$$\frac{32\pi^3(\mu-1)^2}{3N\lambda^4}.$$

Es ist wohl kaum notwendig, ausdrücklich auf den tiefgreifenden Unterschied hinzuweisen, der zwischen unserem Resultate und den Anschauungen besteht, die Herr Planck seinen neueren Theorien zugrunde gelegt hat. Herr Planck betrachtet stets isolierte Resonatoren. Er nimmt an, daß die Maxwell-Lorentzsche Theorie für die absorbierte Energie den richtigen Betrag gibt. Dagegen soll die Emission nicht nach dieser Theorie geschehen. Wir haben dagegen die Wechselwirkung zwischen Resonatoren betrachtet. Wir haben gefunden, daß die Aussage der klassischen Theorie, daß die auf ein Elektron wirkende Kraft im Mittel:

$$e\left(E+\frac{1}{3}P\right)$$

ist, nicht ganz richtig ist und daß folglich die elektromagnetische Theorie des Lichtes in ihrer üblichen Form einen unrichtigen Wert für die absorbierte Energie ergibt. Dagegen haben wir ihre Ergebnisse betreffs der Emission als gültig angenommen.

Zur Frage von der Bedeutung unseres Ergebnisses für die Theorie des photoelektrischen Effektes hoffe ich zurückkommen zu können.

Upsala, Juni 1916.

(Eingegangen 4. Juli 1916.)

Eine neue Hochspannungsbatterie.

Von H. Greinacher.

Einrichtung.

Das Prinzip des im folgenden beschriebenen Apparates habe ich bereits vor einiger Zeit[1]) angegeben. Damals wurde eine Einrichtung beschrieben, welche erlaubt, aus einem Wechselstromnetz konstante Gleichspannung zu entnehmen. Im Speziellen wurde dabei eine Schaltung verwendet, welche direkt Gleichspannung vom doppelten Betrage der Wechselspannung lieferte. In Fig. 1 sei dieselbe nochmals kurz

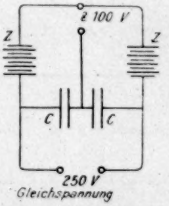


Fig. 1.

skizziert. ZZ sind je 4 Graetzsche Ventilzellen, CC zwei Telephonkapazitäten von je 2 Mikrofarad. Die Wirkungsweise dieses „Gleichspannungsformers", der bei kleiner Stromentnahme (unter 1 Milliampere) praktisch vollkommen konstanten Gleichstrom liefert, ist ohne weiteres ersichtlich.

Der Apparat war in dieser Ausführungsform zunächst für Gleichspannungen bis 250 Volt geeignet. Es lag nun aber nahe, die Einrichtung auch zur Gewinnung konstanter Hochspannung zu benützen. In der Tat gelang es ohne Mühe, eine „Hochspannungsbatterie" nach diesem Prinzip herzustellen, welche in vielen Fällen geeignet sein dürfte, die bisher gebräuchlichen Akkumulatorenbatterien zu ersetzen. Fig. 2 zeigt die Ansicht eines solchen bis 6000 Volt Gleichspannung liefernden Apparates von oben.

Da eine Graetzsche Zelle nur eine beschränkte Spannung (ca. 25 Volt) abdrosselt, so sind hier deren viele hintereinandergeschaltet. Man sieht zwei Batterien von je 70 Zellen.

1) H. Greinacher, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 320, 1914.

Letztere bestehen (wie früher) aus kleinen Reagenszylinderchen (5 cm), in welche als Elektroden je ein Eisen- und ein Aluminiumdraht eintauchen. Die Röhrchen sind mit konzentrierter $NaHCO_3$-Lösung zu $^2/_3$ gefüllt. Der Rest ist zur Vermeidung von Verdunstung und Hinaufkriechen der Flüssigkeit mit Paraffinöl vollgegossen. Die Zellen selbst sind zur Isolation auf Paraffin montiert.

Statt der früher verwendeten kleinen Telephonkapazitäten, die nur auf eine Durchschlagssicherheit von 350 Volt geprüft waren, wurden hier große, auf 2000 Volt geprüfte Wickel-

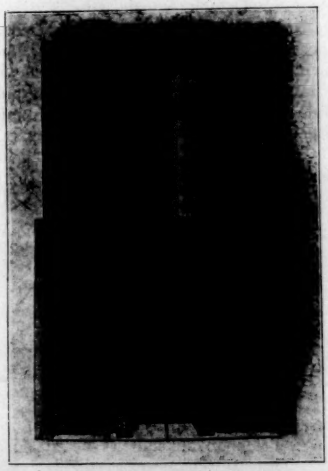


Fig. 2.

kondensatoren verwendet. Zudem wurden je 4 Kondensatoren von 2 μF hintereinandergeschaltet, so daß jede der Kondensatorbatterien theoretisch 8000 Volt aushielt. Die durch das Hintereinanderschalten bewirkte Verminderung der Kapazität auf je $^1/_2$ μF war, wie die Versuche zeigten, durchaus zulässig.

An den Klemmen oben wird der Wechselstrom angeschlossen, an den Klemmen unten erfolgt die Gleichstromentnahme. Die Drahtverbindungen sind an Hand des Schemas Fig. 1 ohne weiteres verständlich. Die nötige Wechselspannung wird durch einen Transformator (z. B. ein Induktorium) erzeugt. In die Primärspule schickt man den Netzstrom; die Sekundärklemme verbindet man mit der „Hochspannungsbatterie". Durch Regulierung des Primärstroms kann man dann jede gewünschte Wechselspannung und damit jede Gleichspannung einstellen. Dabei braucht man einen relativ kleinen Induktor zur Transformation, da die nötige Wechselspannung stets weniger als die Hälfte der erzielten Gleichspannung beträgt.

Prüfung der Hochspannungsbatterie.

Um die Verwendungsmöglichkeiten der neuen Hochspannungsbatterie kennen zu lernen, war es nötig, sie auf folgende Eigenschaften zu prüfen: 1. die maximale Spannung, bis zu welcher sie funktioniert; 2. die Konstanz der erzielten Gleichspannung. Letztere konnte, auch bei vollkommen konstanter Netzspannung in zweierlei Hinsicht beeinträchtigt sein. Einmal konnte die

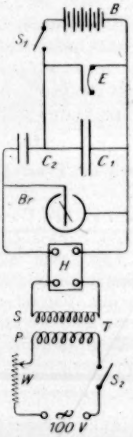


Fig. 3.

Abdrosselung der Ventilzellen Unregelmäßigkeiten zeigen, dann konnte aber auch der Gleichspannung infolge der nicht idealen Ventilwirkung etwas Wechselspannung beigemischt sein.

Um zunächst eine Beimischung von Wechselspannung zu erkennen bez. zu messen, erwies sich nach früherem[1]) das Vibrationselektrometer als besonders geeignet. Die Meßanordnung selbst ist in Fig. 3 angegeben. Hierin bedeuten

B eine Ladebatterie von 40 Volt,
E das Vibrationselektrometer,
C_2 eine bis 10000 Volt durchschlagsichere Kapazität von 0,0054 μF,
C_1 einen auf $^1/_{1000}$ μF abstufbaren Meßkondensator,
B_r ein die Spannung der Hochspannungsbatterie H anzeigendes Braunsches Elektrometer.

1) H. Greinacher, Elektrotechnik u. Maschinenbau 32, 415, 1914.

Die Verwendung der Kapazitäten $C_1 C_2$ hatte folgenden Zwecken zu dienen. Einmal sollten an E nur Spannungsänderungen beobachtet werden, wobei die Einwirkung der ganzen Spannung von H ausgeschaltet sein mußte. Sodann sollten die Spannungsänderungen von H durch Abgleichen von C_2 auf einen passenden kleineren Betrag am Elektrometer E reduziert werden. Die Batterie B diente nur dazu, um E für Spannungsschwankungen empfindlicher zu machen.

Die Beobachtungen geschahen nun so, daß man erst S_1 und dann S_2 schloß. Nachdem das Braunsche Elektrometer durch Regulieren von W auf eine bestimmte Spannung eingestellt war, wurde S_1 unterbrochen. Falls nun die Hochspannung vollständig konstant war, so mußte E ruhig bleiben. In Wirklichkeit zeigte sich aber die charakteristische, durch Wechselspannung (50 Perioden) hervorgerufene Fadenverbreiterung.

Es handelte sich nun darum, die Größe der beigemischten Wechselspannung zu bestimmen. Obschon für das Vibrationselektrometer keine Skala vorgesehen ist, so läßt sich das Instrument durch einen Kunstgriff doch als Meßapparat verwenden. Man kann nämlich die Fadenbreite als Maß benützen. Um eine Verdoppelung des Fadens zu bekommen, muß eine ganz bestimmte Wechselspannung angelegt werden. Dabei ist die Verdoppelung genügend genau zu beobachten, da bei etwas zu geringer Spannung in der Mitte ein schwarzer Strich (Überdeckung der Fadenränder), bei etwas zu viel ein heller Strich (Abstand der Fadenränder) entsteht. Es ergab sich, daß bei einem 6μ-Faden und 150-facher Vergrößerung die Einzelbeobachtungen um höchstens 2 —3 Proz. voneinander abwichen. Im Mittel wurde (bei 50 Perioden) 0,60 Volt gefunden.

Die Bestimmung der Wechselspannung geschah nun so, daß man C_1 jeweils so abglich, daß Fadenverdoppelung eintrat. Die an den Klemmen von H vorhandene Wechselspannung V' berechnete sich dann in bekannter Weise nach der Formel

$$V' = 0{,}60 \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_2} \text{ Volt.}$$

Statt dieser Berechnung wurde jedoch eine direkte Eichung vorgezogen. Zu dem Zweck wurde die Hochspannungsbatterie weggenommen, worauf man an ihrer Stelle bekannte Wechselpotentiale anlegte. Diese wurden durch Abzweigen an einem mit 105 Volt Wechselspannung gespeisten Meßrheostaten von 10000 Ohm hergestellt. Auf diese Weise erhielt man dann eine Eichkurve, welche die angelegten Potentiale als Funktion von C_1 ergab.

In Fig. 4 seien nun die Resultate graphisch

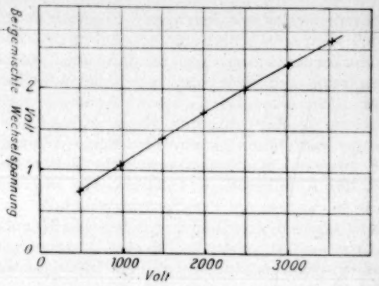


Fig. 4.

wiedergegeben. Die Beobachtungen wurden einmal bei aufsteigenden Potentialen (500—3500 Volt) und einmal bei absteigenden gemacht. Es wurde dann bei den durchwegs kleinen Differenzen das Mittel genommen. Die Zeit zwischen zwei Beobachtungen beträgt, da stets erst eine konstante Einstellung abgewartet wurde, 10 Minuten. Aus Fig. 4 folgt, daß die Wechselpotentiale stets nur klein waren und im übrigen linear mit der Gleichspannung anstiegen. Die Wechselspannung beträgt rund 1 Promille der Gleichspannung. Selbst bei 6000 Volt wurde noch dasselbe Verhältnis gefunden. Wurde der eine Pol der Hochspannungsbatterie, wie dies ja für viele Zwecke geschieht, geerdet, so verringerte sich die an und für sich schon kleine Wechselspannung noch weiter.

Es sei bemerkt, daß die Beobachtungen bei höheren Spannungen weniger gut auszuführen waren. Eine gewisse Leitfähigkeit des Kondensators C_2 machte sich immer stärker bemerkbar, so daß der Faden des Elektrometers beim Öffnen von S_1 durch das Gesichtsfeld wanderte. Aus diesem Grunde ließ man auch S_1 nur wenige Sekunden geöffnet und beobachtete möglichst rasch nach dem Öffnen des Kontaktes.

Außer den regelmäßigen Fadenvibrationen infolge der Beimischung von Wechselspannung zeigten sich, namentlich bei höheren Potentialen, momentane Zuckungen des Fadens. Diese plötzlichen Spannungsschwankungen dürften auf kleine Unregelmäßigkeiten in der Ventilwirkung der Zellen zurückzuführen sein. Sie blieben aus, solange die Zellen nicht auf zu hohe Ventilwirkung beansprucht wurden, nämlich bis etwa 3000 Volt. Sodann traten vereinzelt kleine Zuckungen ein, welche schließlich immer häufiger und stärker wurden. Das Braunsche Elektrometer zeigte jedoch selbst bei 5000 Volt noch keine Schwankungen. Bei 6000 Volt stellten sich schließlich auch am Braunschen Elektrometer kleine Zeigerschwingungen ein, die bei 8000 Volt bereits

mehrere Skalenteile betrugen. Zugleich setzten dann auch schwache Funkenentladungen an den Papierkondensatoren ein, so daß eine weitere Steigerung der Spannung nicht ratsam schien. Man hatte hier also die obere Grenze erreicht, obschon die Kondensatorbatterien eigentlich auf 16000 Volt hätten sicher sein sollen. Allein die bei größerer Spannung verringerte Isolierfähigkeit der Kondensatoren bewirkte eine ungleichmäßige Verteilung des Spannungsabfalles auf die einzelnen hintereinandergeschalteten Kondensatoren, sodaß schon bei 8000 Volt vereinzelte Funkenströme beobachtet wurden. Als dauernde zulässige Belastung ergab sich daher 6000 Volt.

Durch ein den Ventilzellen vorgeschaltetes Wechselstrom-Milliamperemeter wurde der Stromverbrauch der Anordnung ermittelt. Er betrug bei 6000 Volt 5 Milliampere. Davon entfiel ein Teil auf den Ladungsstrom der Kondensatoren infolge der Beimischung von etwa 6 Volt Wechselstrom. Dieser berechnet sich zu $6 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-6} = 0{,}0005$ Ampere. Der größere Teil der Energie wurde also durch Verluste in den Ventilzellen verbraucht. Der immerhin geringe Energieverbrauch ging bei kleinen Spannungen noch bedeutend (stärker als linear) zurück.

Es war nun noch von Interesse, die Hochspannungsbatterie auch bei Stromentnahme zu prüfen. Zu diesem Zweck wurde sie über einen Widerstand von 1 Million Ohm geschlossen. Um dieselben Spannungen wie früher zu bekommen, mußte der Wechselstrom verstärkt werden (Regulierung von W in Fig. 3). Es zeigte sich, daß das Fadenbild im Vibrationselektrometer von dem gewöhnlich beobachteten etwas abwich. Quantitative Schlüsse auf die beigemischte Wechselspannung waren daher nicht zu gewinnen. Doch ließ sich feststellen, daß diese Beimischung verhältnismäßig nur wenig zugenommen hatte; bei 3000 Volt, also einer Stromentnahme von 3 Milliampere, schätzungsweise auf 3 bis 4 Volt. Jedoch zeigte sich die Gleichspannung dadurch etwas beeinflußt, daß kleine, durch sprunghafte Bewegung des Fadens charakterisierte, Potentialschwankungen auftraten. Der Grund dürfte auch hier die durch Stromentnahme vermehrte Belastung der Ventilzellen sein.

Schluß.

Vergleicht man die neue Hochspannungsbatterie mit den gewöhnlichen Akkumulatorensystemen, so ergeben sich folgende Vorteile:

1. Ein außerordentlich niedriger Anschaffungspreis und so gut wie keine Unterhaltungskosten.
2. Keine Ladung und Wartung und damit stete Gebrauchsfertigkeit.
3. Bequeme Einstellbarkeit auf alle gewünschten Spannungen.
4. Unempfindlichkeit gegen Kurzschluß.
5. Gefahrlosigkeit im unbenützten Zustande.
6. Kleine Raumbeanspruchung.

Diesen Vorteilen gegenüber stehen folgende Nachteile:

1. Die Konstanz der Spannung ist etwas beeinträchtigt sowohl durch die Spannungsschwankungen des Netzes als durch die Beimischung von etwa 1 Promille Wechselspannung und ev. von kleinen Spannungsschwankungen bei vermehrter Beanspruchung der Ventilzellen.
2. Bis zur konstanten Einstellung der Spannung muß einige Minuten, bei langem unbenütztem Stehen des Apparates etwas länger gewartet werden.
3. Die Hochspannungsbatterie kann nicht unterteilt werden.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität, Juni 1916.

(Eingegangen 30. Juni 1916.)

Über den elektrischen Widerstand des Wismuts.

Von A. Werner.

(Mitteilung aus der Physikalisch-technischen Reichsanstalt.)

Seit einer Reihe von Jahren[1]) sind in der Reichsanstalt umfangreiche Versuche im Gange mit dem doppelten Ziel, einerseits bestimmte Metalle möglichst rein darzustellen und andererseits die analytischen Untersuchungsmethoden so zu verfeinern, daß sie höchsten Ansprüchen der Kontrolle genügen. In Verfolg dieser Untersuchungen wurde beim Wismut als Gradmesser für die Reinheit nach dem Vorgang von Righi[2]), van Aubel[3]) und Lenard[4]) auch sein elektrisches Leitvermögen herangezogen. Die Verwendung dieser elektrischen Methode zur Prüfung auf Reinheit des Wismuts ist aber an gewisse Voraussetzungen gebunden und kann unter Umständen zu falschen Ergebnissen führen. Schon in den alten Untersuchungen von Matthiessen und v. Bose[5]) wird auf den Einfluß hingewiesen, den die thermische Behandlung auf das Leitvermögen des Wismuts besitzt. Längeres Erhitzen auf 100° vermehrt die Leitfähig-

1) Berichte über die Tätigkeit der Phys.-techn. Reichsanstalt 1914 u. 1915.
2) Righi, Nuov. Cim. **31**, 1885.
3) Van Aubel, Phil. Mag. (5) **28**, 1889.
4) Lenard, Wied. Ann. **39**, 1890.
5) Matthiessen u. v. Bose, Pogg. Ann. **115**, 1862.

keit von gepreßten Wismutdrähten um Beträge, die 20 Proz. und mehr erreichen können.

Neuerdings ist nun von Cohen und Moesveld[1]) festgestellt worden, daß das Wismut zwei allotrope Modifikationen zu bilden imstande ist, die enantiotrop sind. Der Umwandlungspunkt liegt unter Atmosphärendruck bei 75°. Die unterhalb dieser Temperatur stabile Form (α Wismut) wandelt sich oberhalb derselben unter starker Volumenzunahme in die oberhalb 75° stabile (β-Wismut) um. Das β-Wismut, welches leicht in metastabilem Zustand unterhalb der Umwandlungstemperatur bestehen bleibt, hat eine merklich größere Leitfähigkeit als die α-Modifikation. Nach Kenntnis dieser Untersuchungsergebnisse erklären sich die von Matthiessen und v. Bose beobachteten Erscheinungen zwanglos dadurch, daß das auf 100° erhitzte Wismut ganz oder teilweise in die β-Modifikation übergegangen ist und so nach Abkühlung in metastabilem Zustand vergrößerte Leitfähigkeit ergeben mußte. Auch die irrtümlichen Angaben von Righi und van Aubel, daß vollkommen reines Wismut auch beim langsamen Abkühlen oder Abschrecken bei 0° immer denselben spezifischen Widerstand aufweist, finden ihre Erklärung in dem von Cohen und Moesveld erbrachten Nachweis, daß bei den hier in Frage stehenden Versuchen stets die β-Modifikation vorgelegen hat. Van Aubel benutzte zwar elektrolytisch bei Zimmertemperatur hergestelltes Wismut, aber das Material wurde unter Zyankalium geschmolzen und abgekühlt, wodurch die Bildung von β-Wismut herbeigeführt wurde.

Ohne Kenntnis der Vorgeschichte des Metalls kann darnach den an undefinierten Gemischen von α- und β-Wismut ausgeführten Widerstandsmessungen zur Bestimmung des Reinheitsgrades nur bedingter Wert beigemessen werden. — Da nun das Pressen der Wismutdrähte weit oberhalb der Umwandlungstemperatur vor sich geht und zur Zeit keine Daten darüber vorliegen, in welcher Weise und in welchem Mengenverhältnis bei der Abkühlung die Bildung der beiden Modifikationen des Wismuts erfolgt, so wurde bei den in folgendem zu beschreibenden Versuchen, um relativ vergleichbare Werte zu erhalten, vor allem für möglichste Gleichartigkeit in der Herstellung der Drähte aus allen Wismutproben Sorge getragen unter besonderer Berücksichtigung der Dauer der Erwärmungen. Bei Einhaltung dieser Vorsichtsmaßregeln war zu erwarten, daß der Einfluß von Verunreinigungen auf das Leitvermögen reiner zum Ausdruck gelangte.

In nachstehender Tabelle I sind die untersuchten Proben des angeblich reinen Wismutmetalls aus verschiedenen Bezugsquellen und die Ergebnisse der chemischen Analyse[2]) zusammengestellt.

Alle Handelsproben enthalten leicht bestimmbare Mengen metallischer Verunreinigungen, unter welchen gewöhnlich Silber, Blei und Kupfer,

Tabelle I.
Verunreinigungen in Prozenten.

Herkunft	von Schuchardt			von Hartmann & Braun			von Kahlbaum		P.-T. Reichsanstalt		
Bezeichnung	1 Bismutum purissimum	2 Bism. puriss. e. Bism. subnitr.	3 Bism. puriss. galvan. reduct.	4 Wismut elektrolytisch gereinigt nach Lenard in Stücken I	5 als Draht	6 in Stücken II	7 Wismut 1913	8 Wismut „Kahlbaum" 1914	9 Wismut aus reinem kristall. Nitrat 1914	10 Wismut aus Probe 7 aus dem Schmelzfluß krist. 1915	11 Wismut aus Probe 8 aus dem Schmelzfluß krist.
Reinigungsstufe[3])	II	II	III	II	II	IV	III	IV	über IV		
Platin				0,015	0,021	0,0032			—	—	—
Silber	0,012	0,0025		0,20	0,254	0,0065	0,026	Spur			
Kupfer	0,02	0,0306	0,0005	0,002	0,0013		0,0024	0,001			
Blei	0,006	Spur	0,01	0,01	Spur		0,035	Spur			
Eisen	Spur	Spur	Spur		Spur	Spur	Spur	Spur			
Zink	0,012		0,01								
Nickel	0,003	0,0094									
Zinn	0,13	0,0567		0,016	0,02						
Antimon	Spur	Spur									
Arsen											
Kohlenstoff	Spur		Spur								
Kieselsäure			0,005								
Summe abg.	0,2	0,1	0,03	0,25	0,3	0,01	0,1	0,001	—	—	—

1) E. Cohen u. A. L. Th. Moesveld, Zeitschr. für physikal. Chemie 85. 1913. 2) Chem. Laboratorium der P.T.R. 3) Siehe hierüber Tätigkeitsbericht der P.T.R. 1915, S. 33.

bisweilen auch Zinn, Nickel, Zink und Platin vertreten sind. Das elektrolytisch hergestellte Wismut enthält im wesentlichen Platin und Silber (4, 5 und 6). Probe 3 neben den üblichen Spuren von Blei und Kupfer auch noch Zink.

Mit Ausnahme von Probe 3, welche in Form eines violett angelaufenen Metallpulvers vorlag, bestanden sie aus kompakten Massen. Das pulverförmige Material mußte für die Herstellung von Draht erst geschmolzen werden, so daß eine reinigende Wirkung durch Oxydabscheidung nicht ganz auszuschließen ist. In dem in der Reichsanstalt aus reinem kristallisierten Nitrat hergestellten Wismut (Schmelzpunkt 271,0° C) ließen sich chemisch keine Verunreinigungen mehr nachweisen. Dabei erwies es sich als empfehlenswert, zur Vollendung der Reinigung des Metalls die Kristallisation aus dem Schmelzfluß unter einer geschmolzenen Paraffinschicht vorzunehmen. Die Frage, ob das Wismut wirksamer auf chemischem oder elektrolytischem Wege zu reinigen ist, muß statistisch zugunsten des chemischen Weges entschieden werden. Leicht erkennbare Gehalte an Platin, Silber, Zinn und Zink (s. Probe 3, 4 und 5) können bei der Reinigung auf chemischem Wege leicht vermieden werden (s. Probe 8). Bemerkenswert ist der bei einigen Proben von nominell reinem Material festgestellte hohe Zinngehalt.

Die durch chemische Analyse charakterisierten Handelsproben wurden nun nebst Proben des in der Reichsanstalt gereinigten Wismuts auf ihre elektrische Leitfähigkeit untersucht. Man ging dabei von an der Luft gegossenen Wismutstücken aus; Spuren von Sauerstoff sind daher als Verunreinigungen der Wismutdrähte nicht ausgeschlossen. Zur Herstellung der erforderlichen Drähte, teilweise bei Luftabschluß unter Paraffin, wurde eine kleine, elektrisch geheizte stählerne Strangpresse benutzt unter Zuhilfenahme einer hydraulischen Presse in ähnlicher Weise, wie von Lenard[1]) angegeben. Die Temperatur, bei welcher gepreßt wurde, konnte durch Thermoelemente, die in geeignete Bohrungen des Stahlblocks in der Nähe der zylindrischen Preßöffnung eingeführt wurden, zuverlässig ermittelt werden; gewählt wurden als Preßtemperaturen die Temperaturen 155°, 195° und 230° C. Der mittlere Durchmesser der Drähte, der durch Wägung und durch direkte Ausmessung mittels einer Mikrometerschraube von Brown und Sharpe bestimmt wurde, betrug durchweg ungefähr 1 mm, die nutzbare Länge etwa 17 cm. Die Messung des elektrischen Widerstands der Wismutdrähte selbst erfolgte nach der Kompensationsmethode in einem Petroleumbade bei zwei Temperaturen in der Nähe der Zimmertemperatur[1]). Das Potential wurde an zwei Schneiden (Abstand etwa 17 cm) abgenommen, die den Draht mit geringem Druck berührten; die Stromstärke, mit welcher der Draht belastet wurde, betrug ungefähr 0,1 Amp.

1) Wied. Ann. **39**, 1890.

Tabelle II.

Probe Nr.	Herkunft	Prozent d. Verunreinigung	Spez. Widerst. d. Drähte bei 22° C; Preßtemperatur: 155°	195°	230°
1	Schuchardt	0,2	1,45	1,30	—
2		0,1	3,30	3,09	3,32
3		0,03	1,36	1,33	1,40
4	Hartmann & Braun	0,25	—	—	—
5		0,3	—	1,29	—
6		0,01	1,23	1,23	—
7	Kahlbaum	0,1	1,25	1,22	1,24
8		0,001	1,23	1,21	1,23
9	Phys.-Techn. Reichsanst.	—	1,21	1,19	1,20
10		—	—	1,20	—
11		—	1,22	1,20	1,20

Tabelle II enthält die für den spezifischen elektrischen Widerstand der Wismutdrähte bei 22° C gefundenen Werte mit einer Unsicherheit von etwa $^1/_2$ Proz. Sie lassen deutlich den schon von Lenard beobachteten Einfluß der Preßtemperatur erkennen. Weiter fällt auf, daß bei der mittleren Preßtemperatur von 195° durchweg die kleinsten Werte für jede Probe erhalten wurden. Vergleicht man die Werte für verschiedene Proben bei einer der drei Preßtemperaturen, so nimmt, wenn man von den Proben 1 bis 3 gleicher Herkunft, die ein ganz abweichendes Verhalten aufweisen, absieht, in der Tat der spezifische Widerstand, von einer Ausnahme abgesehen, mit zunehmender Reinheit des Wismuts ab. Die genannten drei Proben dagegen zeigen wesentlich höhere Werte, als nach dem Ergebnis der Analyse zu erwarten ist. Bemerkenswert ist der besonders große Widerstand von Probe 2, welche aus gefälltem basischen Wismutnitrat erhalten war. Dieses Präparat hat im Gegensatz zu allen übrigen untersuchten Wismutproben einen negativen Temperaturkoeffizienten (Tab. III) und zeichnet sich, wie auch Probe 1, durch Verunreinigungen aus der Zinngruppe aus. Nach den alten Versuchen von Matthiessen ist anzunehmen, daß die chemische Natur einer Verunreinigung von großem Einfluß auf die von ihr hervorgebrachte Widerstandsvermehrung ist, und Righi[2]) hat bereits darauf hingewiesen, daß besonders ein Zinngehalt den elektrischen Widerstand des Wismuts stark erhöht.

1) Zum größten Teil vom Schwachstrom-Laboratorium der P.T.R. ausgeführt.

2) Righi, Fortschr. d. Physik **40** (II) 733, 1884.

Tabelle III.

Probe Nr.	Herkunft	Temperaturkoeffizient Preßtemperatur: 155°	195°	230°
1	Schuchardt	+ 0,0029	+ 0,0036	—
2		— 0,0013	— 0,0010	— 0,0015
3		+ 0,0031	+ 0,0029	+ 0,0027
4	Hartmann und Braun	—	—	—
5		—	—	—
6		+ 0,0039	+ 0,0040	—
7	Kahlbaum	+ 0,0038	+ 0,0038	+ 0,0038
8		+ 0,0038	+ 0,0039	+ 0,0039
9	Phys. Techn. Reichsanst.	+ 0,0039	+ 0,0039	—
10		—	+ 0,0040	—
11		+ 0,0040	+ 0,0040	+ 0,0040

Im übrigen zeigen die für das Temperaturintervall 18—25° C berechneten und in Tab. III zusammengestellten Temperaturkoeffizienten des Widerstands mit wachsender Reinheit des Wismuts ansteigende Tendenz und keine wesentliche Abhängigkeit von der Preßtemperatur. Den hohen Widerstandswerten der Proben 1—3 kommen die kleineren Temperaturkoeffizienten zu; bei dem überraschend großen Werte der Probe 3 wird der Koeffizient sogar negativ.

Die in der Reichsanstalt gewonnenen Wismutproben 9—11, welche auf dem Wege der Kristallisation gereinigt waren, haben den geringsten spezifischen Widerstand (Tab. II), und zwar war Probe 9 (Kristallisation als Nitrat aus wässeriger Lösung) in naher Übereinstimmung mit den Proben 10 und 11 (Kristallisation des Metalls aus dem Schmelzfluß). Diese Werte sind um mehrere Prozent niedriger als der Wert 1,235 der Probe 6, welche bei Hartmann und Braun sorgfältig elektrolytisch gereinigt war. Die Vermutung, daß hier noch Verunreinigungen nachweisbar seien, wurde durch die Analyse bestätigt (Tab. I).

Damit ist aufs neue gezeigt, daß die elektrolytische Reinigung des Wismuts schwieriger durchführbar ist als der chemische Weg, welcher zu höheren Reinigungsstufen führt. Andrerseits muß aber bemerkt werden, daß der in der Reichsanstalt für das Wismut in Drahtform festgestellte Wert 1,20 nicht unerheblich größer ist als die Werte 1,09 bis 1,16 (je nach der Preßtemperatur), welche Lenard 1890 angibt.

(Eingegangen 11. Juli 1916.)

Eine neue Anordnung zur Darstellung stehender Wechselstromkurven mit der Braunschen Röhre.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von C. H. Graf v. Bressler.

Im Folgenden soll eine Anordnung beschrieben werden, die ich ausgearbeitet habe, um mit Hilfe der Braunschen Röhre Wechselstromvorgänge durch feststehende Wellenkurven auf dem Schirm der Röhre beobachten und messen zu können.

Zur Ablenkung des Fleckes nach der neuen Methode sind zwei Schaltungen möglich. Ursprünglich wurde folgende benutzt (Fig. 1).

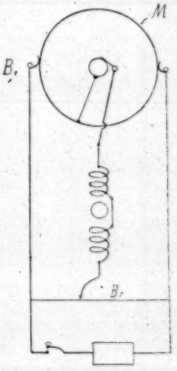


Fig. 1.

Auf der Achse eines sechspoligen Synchronmotors (alter Schleifringdrehstrommotor $^1/_{16}$ PS.) der als Einphasenmotor umgeschaltet wurde[1]), war eine Holzscheibe von ca. 25 cm Durchmesser aufgesetzt und auf deren Umfang ein Manganindraht M von 1 mm Durchmesser ausgespannt. Der Draht wurde mit dem dritten, frei gewordenen Schleifring des Motors verbunden. Auf dem Draht schleiften an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen Bürsten, B_1, B_2, aus übereinandergelegten dünnen Kupferblechen. Diese lagen parallel zu den Enden eines zweiten Brückendrahtes Br. In die Brücke wurden die Ablenkungsspulen der Braunschen Röhre gelegt. Die Ableitungsstelle des Drahtes M wurde in die Mitte zwischen B_1 und B_2 gebracht und die Brücke durch Abgleichung von Br stromlos gemacht. Eine geringe Drehung der Scheibe störte nun das Gleichgewicht der Brückenschaltung und der Fleck wurde je nach dem Dreh-

1) Solche Motoren sind neu oder gebraucht leicht erhältlich (Siemens & Halske). Außerdem sind sie viel billiger und vielseitiger verwendbar als besondere Spezialapparate. (Verwendung als Generator, als Synchronmotor, für Untersuchungen nach der stroboskopischen Methode, zur Schwingungsanalyse mit rotierender Heliumröhre usf.). Man trennt in Stator und Rotor die einzelnen Polwicklungen, die gewöhnlich in Sternschaltung liegen und schaltet sie je nach Bedarf hintereinander oder parallel, wobei darauf zu achten ist, daß stets Nord- und Südpol einander abwechseln, was sich leicht mit einem Kompaß feststellen läßt.

sinn nach der einen oder anderen Richtung proportional dem Drehungswinkel abgelenkt.

Passiert der Anschlußpunkt B_1 oder B_2, tritt eine Umkehr der Ablenkung ein. Während einer Umdrehung muß der Strom der Kurve Fig. 2a entsprechen. In derselben Zeit beschreibt der Wechselstrom, da der Motor sechspolig ist, die Kurve 2b. Nach einer halben

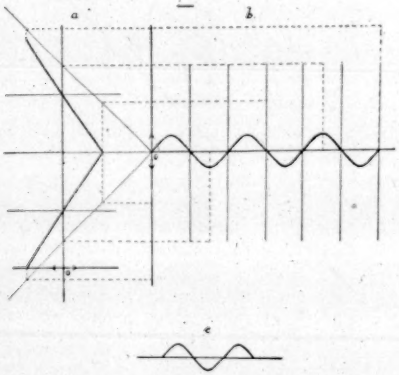


Fig. 2.

Umdrehung kehrt der ablenkende Strom seine Richtung um, während der Wechselstrom im selben Sinne weiterläuft. Die resultierende Kurve läuft also in sich selbst zurück und zeigt ein und einhalb Perioden des Wechselstroms. (Figur 2c.) Der praktische Versuch zeigte die erwartete Kurve, doch war sie unkonstant und höchstens für Demonstration, aber nicht für Messungen brauchbar. Die Hauptschwierigkeiten waren folgende.

1. Die unsicheren Brückenkontakte B_1 und B_2 gaben zu Stromschwankungen Anlaß.

2. Das zur Ablenkung nutzbare Spannungsgefälle längs des Brückendrahtes M, dem auch stets noch $^1/_2$ seiner Gesamtlänge parallel geschaltet war, war wegen seiner Kürze sehr gering. (Der Versuch, den geraden Draht durch eine spiralige Wicklung, ähnlich dem Ringanker, zu ersetzen, führte infolge der größeren konstruktiven Schwierigkeiten und noch schlechteren Kontaktbildung nicht zum Ziele.) Um eine genügende Ablenkung zu erhalten, mußten sehr starke Ströme (gegen 20 Amp.) angewandt werden, was den Fehler 1 vergrößerte und die Drähte übermäßig erwärmte. Um dem abzuhelfen wurde zu folgender Schaltung übergegangen.

Der unterbrochene Schleifdraht M (Fig. 3) wurde als ein Brückenzweig benutzt, als zugehöriger Zweig erst ein fester Widerstand W von 0,1 Ohm, als Ausgleichwiderstand ein Schieberheostat R. Während des Betriebes war es sehr störend, daß infolge Erwärmung von M sich das Brückengleichgewicht ändert und ein Wandern des ganzen Kurvenbildes nach einer Richtung eintritt. Dies konnte völlig beseitigt werden durch Ersetzen von W durch einen Manganindraht von denselben Abmessungen wie M.

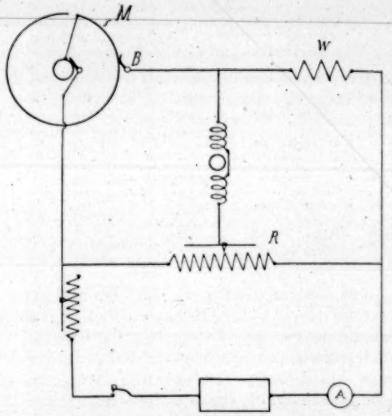


Fig. 3.

In die Ablenkungsspulen von nur wenigen Windungen wurden dünne Eisendrahtbündel gesteckt[1]). Der Gesamtwiderstand von R betrug 6 Ohm. Bei dieser Schaltung wurden alle drei Perioden während einer Umdrehung nach derselben Richtung abgelenkt und konnten bei einer Stromstärke in A von etwa 17 Amp. über den ganzen Schirm der Röhre auseinandergezogen werden. Außerdem gestattet der Widerstand R jede seitliche Verschiebung des Kurvenbildes (z. B. Einstellung auf ein Achsenkreuz). Zur Vermeidung von Stromstößen muß die Schleifbürste so gebaut sein, daß sie beide

Fig. 4.

1) (Vorsicht bei sehr schnellen Stromänderungen wegen Kurvenverzerrung durch Hysteresis.)

Enden des Schleifdrahtes, die möglichst nahe, aber isoliert voneinander befestigt sein müssen, im Vorbeigleiten gleichzeitig berührt. (Fig. 4). Selbstverständlich kann man die Scheibe auch, anstatt auf einen Synchronmotor auf der Achse des Generators selbst anbringen, was man vorteilhaft bei kleineren Maschinen, die schwache Ströme geben, wie z. B. Wechselstromsirenen, tun wird.

Eine Auflösung des Ablenkungsstroms allein mit Spiegel zeigte das Bild Fig. 5. Zum

Fig. 5.

Photographieren der Kurven reichte die vorhandene Influenzmaschine nicht aus. Sie wurden auf folgende Weise fixiert (Fig. 6). Hinter

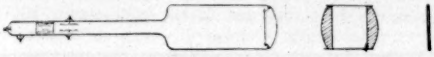


Fig. 6.

der Röhre wurde ein kurzbrennweitiges optisches System von großer Lichtstärke aufgestellt, das die Kurve auf eine Milchglasplatte in natürlicher Größe projizierte. Hier wurde sie mit Bleistift nachgezeichnet und auf Koordinatenpapier durchgepaust, von dem dann photographische Abzüge gemacht wurden. Um die Kurven auf dem Schirm selbst zu messen, wurde nach Fig. 7 verfahren. Vor die Milchglasscheibe wurde ein schwarzes Kartonblatt gesetzt, in welches mit einem scharfen Messer ein Achsenkreuz mit Einheitsstrichen auf den Achsen eingeschnitten wurde. Hinter die Mattscheibe wurde ein kleines Glühlämpchen gestellt und das Achsenkreuz auf den Schirm in der Röhre projiziert. Messungen von Phasenverschiebungen und Oberschwingungen lassen sich auf beide Arten mit großer Genauigkeit ausführen. So kann man z. B. zur Messung von Phasenverschiebungen erst die eine, dann die andere Kurve auf der Mattscheibe einzeichnen und die Abstände der Nullpunkte messen. Noch einfacher geschieht dies am hineinprojizierten Achsenkreuz, wo man nacheinander die Abstände der Nullpunkte vom Koordinatenanfang direkt ablesen kann. Für Demonstrationen ist es noch übersichtlicher, wenn man eine ähnliche Kurve in das Kartonblatt einschneidet, die durch den Koordinatenursprung geht und die Nullpunkte der einen Stromkurve mit denen der feststehenden zur Deckung bringt. Man sieht dann bei Einschalten des phasenverschobenen Stromes beide Kurven in ihrer zeitlichen Folge auf dem Schirm. Ebenfalls für Demonstration besonders geeignet ist es, wenn man die Wechselstromspulen der Röhre in den Stromkreis des Synchronmotors einschaltet. Da ja dieser je nach der Erregung als Kapazität oder Selbstinduktion wirkt, so sieht man auf dem Schirm wie die veränderliche Kurve je nach der Erregung mit der feststehenden zur Deckung kommt, ihr vor- oder nacheilt. Vergleiche mit den Werten, für cos φ erhalten aus den Kurvenverschiebungen mit den aus dem Voltmeter, Amperemeter und Wattmeter ermittelten Werten, zeigten gute Übereinstimmung. Bei genauer präzisionsmechanischer Ausführung der Apparatur muß sich noch eine weit größere Genauigkeit und Beständigkeit der Kurven erreichen lassen, als es bei dem vom Verf. in verhältnismäßig kurzer Zeit, während eines Urlaubs, für eine besondere Untersuchung zusammengebauten Apparat möglich war. Da ja die Braunsche Röhre keine mechanische Trägheit besitzt und infolgedessen selbst zur Analyse von Hochfrequenz brauchbar ist, so ist für die auflösbare Frequenz nach der neuen Methode eine Grenze nur gegeben durch die Frequenz, bei welcher infolge der hohen Drehzahl des Motors oder Generators grade noch ein sicherer Kontakt zwischen Draht und Schleifbürste möglich ist. Bei sorgfältiger Konstruktion wird sich diese Grenze jedenfalls weiter hinausschieben lassen als es beim Oszillographen infolge der mechanischen Trägheit seines Systems möglich ist. Weitergehende Versuche mit der neuen Anordnung sowie Veröffentlichung von Kurvenbildern waren infolge der Kürze der Zeit nicht möglich.

Zusammenfassung.

Es wird eine neue Schaltung angegeben, durch welche man die genaue Kurve des Wechselstroms dauernd stehend auf dem Schirm der Braunschen Röhre erhalten kann.

In einer abgeglichenen Brückenschaltung besteht ein Zweig aus einem, auf dem Umfang einer synchron rotierenden Scheibe befestigten

Fig. 7.

Draht, an dem eine Bürste schleift. In der Brücke, in der die Ablenkungsspulen liegen, werden dadurch periodische Stromänderungen hervorgerufen, die der Zeit proportional sind.

Es wird gezeigt, wie sich die Kurven durch ein auf den Schirm projiziertes Achsenkreuz bequem messen lassen und wie sich die Anordnung zur Demonstration von Wechselströmen verwenden läßt.

(Eingegangen 1. Mai 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Forschungen zur Farbenlehre.

Von W. Ostwald.

(Fortsetzung und Schluß.)

Die Einteilung des Farbenkreises.

Für die Ordnung der Farbtöne im Farbenkreise besaß die bisherige Farbenlehre die beiden Prinzipien der Stetigkeit und der Gegenfarben. Das Prinzip der Stetigkeit besagt, daß sämtliche Farben ihrem Farbton nach in eine ununterbrochene Reihe gebracht werden können, wobei sich herausstellt, daß diese Reihe keine einseitig verlaufende, sondern eine in sich zurücklaufende oder geschlossene ist. Dieses trifft bekanntlich für die Farben des Spektrums und die zugehörigen Wellenlängen keineswegs zu und daraus ergibt sich eine eigentümliche Anomalie, von der wir einen Teil bereits in der spektralen Lücke des Farbenkreises kennen gelernt haben. Vermöge des Stetigkeitsgesetzes ist unter allen Umständen eine eindeutige Ordnung aller vorkommenden Farbtöne der Reihe nach möglich. Da die Geschlossenheit der Reihe den Kreis als Veranschaulichung der Farbtongruppe nahelegt, so kann man sagen, daß das Stetigkeitsprinzip die Folge der Farben auf diesem Kreise sicherstellt, dagegen noch nicht den Ort jeder einzelnen auf dem Kreise. Die Farben gleichen vermöge dieses Prinzips Perlen auf einer geschlossenen Schnur, die man in beliebiger Weise hin- und herschieben, enger oder weiter anordnen kann.

Das zweite bekannte Prinzip ist das der Gegenfarben. Für jeden Farbton im Farbenkreise findet sich ein anderer und nur ein einziger, welcher die Eigenschaft hat, mit diesem additiv oder optisch vermischt ein neutrales Grau zu erzeugen. Hierzu ist ein bestimmtes quantitatives Verhältnis der beiden Farben erforderlich, welches von ihrem Reinheitsgrade derart abhängt, daß die relative Menge der einzelnen Farbe, die zur Neutralisation der Gegenfarbe erforderlich ist, im umgekehrten Verhältnis zu ihrer Reinheit steht. Durch das Prinzip der Gegenfarben werden im ganzen Farbenkreise die Farben paarweise einander zugeordnet. Dieses hat zur Folge, daß, wenn die eine Hälfte des Farbenkreises auf irgendeine Weise eine Ordnung erfährt, hierdurch die andere Hälfte alsbald gleichfalls geordnet ist, weil für jede Farbe der ersten Hälfte des Kreises die zugehörige Gegenfarbe an dem Ende des entsprechenden Durchmessers anzubringen ist.

Die Aufgabe der eindeutigen Ordnung ist offenbar hierdurch noch nicht gelöst, da auf dem halben Farbenkreise immer noch dieselbe Freiheit besteht, wie sie ohne das Prinzip der Gegenfarben auf dem ganzen Farbenkreise bestanden hat. Bei der Suche nach einem allgemeinen Prinzip, welches die noch vorhandene Freiheit in eine Gesetzmäßigkeit umzuwandeln gestattet, ist es offenbar erforderlich, von irgendeinem neuen und unabhängigen Phänomen Gebrauch zu machen, ebenso wie der erste Schritt zur Ordnung durch die Sondererscheinung der Gegenfarben ermöglicht wurde. Das Erscheinungsgebiet, welches hierfür in Frage kommt, ist das der Farbenmischung, für welche bereits Newton in seiner Schwerpunktsregel ein quantitatives Konstruktionsverfahren gegeben hat, für das er freilich nur annähernde Gültigkeit in Anspruch nahm. Schält man das Grundsätzliche aus dieser Konstruktion heraus und erweitert den dabei anzutreffenden Gedanken in angemessener Weise auf den ganzen Kreis, so erlangt man ein Mittel zur eindeutigen Ordnung aller Farben, welches ich das Prinzip der innern Symmetrie nenne. Es besagt, daß, wenn zwei gesättigte Farben des Farbenkreises zu gleichen Teilen miteinander gemischt werden, die entstehende Mischfarbe genau in die Mitte zwischen die beiden Komponenten zu setzen ist. Hierbei kommt es nicht in Betracht, daß die Mischfarben jedesmal weniger rein ausfallen als die Bestandteile es sind, da es sich ja nur um die Ordnung der Farbtöne handelt, die von der Reinheit unabhängig sind. Denn zu jedem Farbton gehört ja eine unendliche Anzahl von Abkömmlingen von jedem beliebigen Reinheitsgrade und jedem beliebigen Verhältnis zwischen dem vorhandenen Schwarz und Weiß. Wohl aber ist von entscheidender Wichtigkeit, daß die beiden zu mischenden Farben von gleicher

Reinheit sind, da im anderen Falle die entstehende Mischfarbe nach der Seite von dem Mittelwert abweichen wird, wo die Komponente die größere Reinheit besitzt. Anderenfalls sind beide Anteile im umgekehrten Verhältnis ihrer Reinheit zu mischen. Die Durchführung dieses Prinzips der inneren Symmetrie verlangt also als notwendige Voraussetzung eine absolute Bestimmung der Reinheit der zusammenzusetzenden Farben und die Wichtigkeit der Reinheitsmessung macht sich auch an diesem entscheidenden Punkte von neuem geltend.

Um das Prinzip zur Herstellung eines reproduzierbaren Farbenkreises zu benutzen, kann man sehr verschiedene Wege einschlagen. Einer der übersichtlichsten, der auch praktisch am besten benutzt wird, ist folgender. Man stellt zunächst aus einigen möglichst reinfarbigen Pigmenten, deren Anzahl 5 bis 6 nicht zu überschreiten braucht, durch die Vermischung gemessener Mengen und Anfertigung von Aufstrichen einen Farbenkreis in willkürlicher Abstufung her, wobei man so viele Stufen macht, daß die einzelnen Stufen nirgend um viel mehr als die Unterschiedsschwelle voneinander entfernt sind. Dies ist immer möglich und leicht ausführbar, indem man zwischen die Gemische, deren Entfernung zu groß erscheint, ein Gemisch einschaltet, dessen Mischungsverhältnis zwischen denen der beiden zu überbrückenden Stufen gelegen ist. Man wird 100—200 Stufen ausreichend finden, um diese Voraussetzung zu erfüllen.

Dann bestimmt man zunächst in dieser Reihe die Gegenfarben. Für diesen Zweck ist erforderlich, die Farben in beliebigem Verhältnis additiv zu mischen. Gewöhnlich dient der Farbenkreisel zur Lösung derartiger Aufgaben. Er hat aber den großen Nachteil, daß er stillgesetzt werden muß, wenn irgendeine Änderung in dem Verhältnis oder in der Natur der Farben vorzunehmen ist, wodurch die Arbeit langwierig wird und ein wichtiges Mittel der Einstellungsgenauigkeit, nämlich die stetige Veränderlichkeit der maßgebenden Variabeln verloren geht. Ich habe deshalb nach dem bereits mehrfach benutzten Prinzip der Kombination eines Wollastonprismas mit einem Nikolschen Prisma einen Polarisationsfarbenmischer konstruiert, welcher die Stetigkeit der Mischung sichert. Das Wollastonprisma entwirft bekanntlich von dem anvisierten Objekt zwei senkrecht polarisierte Bilder, die um einen bestimmten Winkel von einigen Graden voneinander entfernt sind. Betrachtet man daher unter einem solchen Prisma zwei nebeneinander liegende Kärtchen farbiger Aufstriche, die so breit sind, daß die Bildverschiebung gerade ihre eigene Breite beträgt, so fallen von den beiden Bildern jeder einzelnen Karte die beiden nach innen gewendeten übereinander und es erscheint dort die additive Mischfarbe, zunächst in dem konstanten Verhältnis von 1 : 1. Um nun dieses Verhältnis beliebig ändern zu können, ist über dem Wollastonprisma ein drehbares Nikolsches Prisma angebracht, welches die Hälfte des durchgehenden Lichtes zerstört und zwar in einem Verhältnis, welches von der Stellung des Nikolschen zum Wollastonprisma abhängt. Rechnet man die Winkel von jener Stellung, wo das eine Bild vollständig ausgelöscht ist, so werden die Lichtmengen der beiden Blätter in einem Verhältnis gemischt, das durch das Quadrat der Tangente des fraglichen Winkels ausgedrückt wird. Man hat es also in der Gewalt, durch Drehung des Nikols jedes beliebige Mischungsverhältnis herzustellen und somit dasjenige aufzusuchen, bei welchem zwei Gegenfarben neutrales Grau ergeben.

Um dieses erreichte Grau mit Sicherheit festzustellen, was wegen der Nachbilder beim Betrachten der farbigen Blätter häufig mit großen Schwierigkeiten verbunden wäre, dient eine Karte mit neutralem Grau, welche man quer zu den beiden erwähnten Blättern legt. Diese Karte hat die doppelte Länge der Verschiebung durch das Wollastonprisma; es bildet sich daher in ihrer Mitte eine Farbe aus, welche gleich der unveränderten Farbe des Blattes selbst ist, weil die beiden Komponenten, die sich dort vereinigen, sich unter allen Umständen zu eins ergänzen. Um ein solches neutrales Grau herzustellen, genügt es beiläufig nicht etwa, ein reinschwarzes Pigment mit einem reinweißen zu mischen, weil sich dann infolge der Blaufärbung trüber Mittel (jener Erscheinung, die Goethe als Urphänomen seiner Farbenlehre betrachtet hat) eine blaue Verfärbung des Gemisches ausbildet, welche die neutrale Beschaffenheit stört. Es ist deshalb nötig, dem Schwarz die rotgelbe Ergänzungsfarbe dieses Blau zuzusetzen, und zwar hat sich das als Goldocker im Handel vorkommende Pigment vom richtigen Ton erwiesen. Je nach dem weißen Farbstoff, den man verwendet, muß der Zusatz des gelben größer oder kleiner sein. Um das richtige Grau zu finden, erzeugt man entweder auf der Drehscheibe aus einer mit schwarzem Seidensammet überzogenen und aus einer mit Bariumsulfat weißgefärbten Scheibe ein neutrales Grau oder man mischt die gleichen Komponenten mit Hilfe des eben beschriebenen Polarisationsfarbenmischers oder „Pomi“. Es gelingt dann leicht, durch systematische Versuche das richtige Verhältnis ausfindig zu machen. Das so erzeugte Gemisch dient dann auch insbesondere für die

Herstellung der Grauleiter, deren Verwendung zu Reinheitsmessungen in dem vorigen Abschnitt geschildert worden ist. Ersichtlicherweise ist hierfür ein vollkommen neutrales Grau erforderlich, da sonst seine Helligkeit in den verschiedenen Teilen des Spektrums verschiedene Werte erhalten würde.

Die weitere Arbeit besteht darin, daß man den Reinheitsgrad jedes Aufstriches im ganzen Farbenkreise bestimmt. Die Arbeit ist nicht gering, aber notwendig, da wie bereits erwähnt, von der Reinheit das Resultat der Mischungen abhängt. Hat man die farbschönsten Pigmente benutzt, die zurzeit zur Verfügung stehen, so wird man sich überzeugen, daß man von Gelbgrün durch Gelb, Orange, Rot und Purpur Reinheiten von rund 80 Proz. verhältnismäßig leicht erreichen kann. Von Violett zum Grün wird die Reinheit aber geringer und es stellt sich dort im Gebiete der kalten Farben eine zusammenhängende Gruppe heraus, in der eine Reinheit von 50 Proz. verhältnismäßig schwer zu erreichen ist und eine von 60 Proz. das Äußerste darstellt, was ich unter irgendwelchen Umständen bisher habe erreichen können.

Ist diese Arbeit beendet, so kann man endlich zum Abstecken gleicher Bogen im Farbenkreise schreiten. Zu diesem Zwecke geht man von einem willkürlich gewählten Anfangspunkte aus, als den ich den hellsten Punkt des Farbenkreises, das reine Zitronengelb an der Grenze zwischen grünlich und rötlich Gelb vorschlage, weil er sich am leichtesten unabhängig bestimmen läßt. Hierzu wählt man in nicht zu großem Abstande einen zweiten Farbton, also etwa ein Dunkelgelb entsprechend dem Dunkelchromgelb. Dann wird unter den noch weiter nach Rot liegenden Aufstrichen der festgestellt, welcher mit dem anfänglichen Zitronengelb vermischt dieses gewählte Dunkelgelb ergibt. Hierbei muß die Mischung in dem umgekehrten Verhältnis der Reinheiten der beiden zu mischenden Farben ausgeführt werden, wozu eben die vorher erwähnten Reinheitsbestimmungen dienen. Das Tangentenquadratgesetz am Pomi gibt seinerseits die Stellung des Nikols an, bei welcher diese Voraussetzung erfüllt ist. Nennt man den Ausgangspunkt a und den zweiten willkürlich gewählten Punkt b, so findet man auf solche Weise einen dritten Punkt c, von dem man gemäß dem Prinzip der innern Symmetrie sagen kann, daß er ebensoweit von b entfernt ist, wie b von a. Jetzt wird nach dem gleichen Verfahren ein vierter Punkt d gleichen Abstandes gesucht, und fährt in solcher Weise fort, bis man zur Gegenfarbe des Ausgangspunktes gelangt. Man kann natürlich nicht erwarten, daß bei der willkürlichen Wahl des Intervalles $a\ b$ genau der Gegenpunkt, den wir mit a' bezeichnen wollen, erreicht wird; vielmehr hat man diese Abtragung des willkürlichen Abstandes so weit fortzusetzen, bis der Punkt a' überschritten ist. Dann kann man aber das letzte Intervall innerhalb dessen a' liegt, mit Hilfe des Pomi so mischen, bis genau die Farbe a' herauskommt und ersieht aus dem Winkel, in welchem Verhältnis die beiden Bestandteile dazu verwendet worden sind. Damit ist der Bruchteil gekennzeichnet, nach welchem dieses letzte Intervall zu teilen ist, um den Punkt a' unterzubringen, woraus sich der Winkelwert des ursprünglichen Intervalls $a\ b$ ergibt. Hiernach sind die einzelnen untersuchten Punkte zu beziffern. Dabei wird der Anfangspunkt a mit 0 und der Punkt a' mit 50 bezeichnet, entsprechend der Forderung, daß der ganze Farbenkreis dekadisch in hundert Teile zu teilen ist.

Die so gemessenen Punkte dienen nun dazu, um die übrigen vorhandenen Aufstriche in bezug auf ihren Farbton mit den zugehörigen Nummern zu versehen und auf solche Weise alle einzelnen Nummern von 0 bis 50 festzustellen. Es finden hier, kurz gesagt, alle die Methoden Anwendung, welche man bei der Herstellung von Kreisteilungen zur Festlegung der Mutterteilung ausgedacht hat, so daß man außer dem beschriebenen Wege noch eine Anzahl andere finden und gehen kann, die dasselbe ergeben.

Zur endgültigen Festlegung der Bezeichnung aller einzelnen Farbtöne ist außer der willkürlichen Bestimmung des Anfangspunktes noch die des Fortschreitungssinnes erforderlich. Bezüglich des ersten ist bereits erwähnt worden, daß sich als Anfangspunkt das reine Gelb empfiehlt. Es wird durch eine Anzahl von wohlbekannten und leicht ihrem Farbton nach reproduzierbaren Pigmenten gekennzeichnet und ist außerdem psychologisch mit großer Sicherheit dadurch zu finden, daß es an der Trennungsstelle der rötlich und der grünlich gelben Farben steht.

Der Sinn des Fortschreitens, durch welchen zwischen den beiden symmetrischen möglichen Anordnungen des Farbenkreises eine Wahl getroffen wird, führt gemäß meinem Vorschlage von Gelb über Gelbrot nach Rot usw. Es wird dadurch bewirkt, daß in dem zunächst zur Geltung kommenden Teil des Farbenkreises die größte Mannigfaltigkeit der Farbtöne, nämlich Gelb, Orange, Rot, Purpur bis Blau liegt, während auf der anderen Seite nur der Rest der blauen und die grünen Farben liegen. Außerdem geht dieser Fortschritt gleichsinnig mit der Größe der Wellenlängen. Er läuft freilich der gewöhnlichen Darstellung des Spektrums ent-

gegen, nach welchem die größten Wellenlängen am Anfang links und die kleinsten am Ende rechts stehen. Es sei ausdrücklich betont, daß diese Voraussetzungen willkürlich sind. Sie liegen aber in der Natur der Sache, da diese in sich zurücklaufende Mannigfaltigkeit keinen natürlichen, sondern nur einen willkürlichen Anfangspunkt und ebenso keinen natürlichen, sondern einen willkürlichen Fortschreitungssinn hat.

Der so geordnete Farbenkreis hat also im Nullpunkt das hellste Gelb. Im ersten Quadranten bei Nr. 25 liegt alsdann das spektrale Rot, welches mit der Farbe des mittleren Zinnobers übereinkommt. Die beiden anderen Quadranten sind durch die Gegenfarben dieser beiden Punkte, nämlich Ultramarinblau und Blaugrün bestimmt. Dieser Farbenkreis stimmt, was besonders bemerkenswert ist, in diesen Hauptpunkten mit dem auf rein psychologischen Erwägungen beruhenden Farbenkreis von E. Hering überein. Ferner fällt er auch mit einem von O. N. Rood aufgestellten Farbenkreis praktisch zusammen, welcher auf der Beobachtung der Kontrasterscheinungen gemäß dem Prinzip beruht, daß die Farbe, welche mit einer gegebenen die stärksten Verschiebungen infolge des simultanen Kontrastes erzeugt, rechtwinklig zu dieser und der zugehörigen Gegenfarbe angeordnet werden muß. Darin liegt eine Bestätigung, daß einerseits das Prinzip der inneren Symmetrie den naturgemäßen Vorzug, den man ihm infolge seiner grundsätzlichen Einfachheit und Allgemeinheit ohnedies zuzuschreiben bereit sein wird, tatsächlich verdient und zweitens, daß die Reinheitsbestimmungen, auf denen ja die Einteilung beruht, grundsätzlich richtig sein müssen, da sie sonst nicht jene Übereinstimmung hätten ergeben können.

Fragt man sich endlich, ob und wie weit das fragliche Prinzip eine Einteilung durchzuführen gestattet, die von der Farbe der Beleuchtung und der subjektiven Beschaffenheit des Auges unabhängig ist, so muß die Antwort lauten, daß eine solche Unabhängigkeit hier nicht zu erreichen ist. Bereits die Bestimmung der Ergänzungsfarben ist nicht unabhängig von beiden Faktoren. Wie man sich einerseits durch theoretische Überlegungen, andererseits durch den Versuch überzeugen kann, geben z. B. bei Lampenlicht andere Farben neutrales Grau, als bei Tageslicht. Ebenso muß eine subjektive Abhängigkeit der Farbenkreisstellung von der Natur des Auges anerkannt werden. Zwar ist diese Abhängigkeit viel geringer als die Mannigfaltigkeiten der Farbempfindung, welche durch Störungen des Farbensinnes hervorgerufen werden, da bekanntlich die meisten Farbenblinden die Farben nur unvollständig, nicht aber im Sinne des Farbenkreises falsch sehen. Es geht dieses aus dem Umstande hervor, daß sie die Farbengleichungen der Farbentüchtigen anerkennen. Daneben gibt es aber eine kleine Anzahl von Sehstörungen, bei welchen diese Übereinstimmung nicht vorhanden ist und für diese allerdings recht seltenen Personen würde also die Einteilung des Farbenkreises andere Resultate ergeben, als für die Normalsichtigen.

Im übrigen scheint der fragliche Einfluß nicht besonders groß zu sein. Der einzige Fall, den ich habe untersuchen können, der des Lichtwechsels, führt zu Abweichungen von zwei bis drei Einheiten des hundertteiligen Farbenkreises, d. h. um nicht eben viel über die Unterschiedsschwelle hinaus, die etwas unterhalb dieser Einheit liegt. Dies gilt allerdings nur für die gewöhnlichen Farben. Für die besondere Klasse der lückenhaften Farben, deren Charakter später einmal geschildert werden wird, treten erheblichere Abweichungen auf. Dadurch, daß man die Teilung des Farbenkreises den Farben und Wellenlängen des Spektrums anschließt, kann man jedenfalls ein gefundenes Teilungsresultat eindeutig fixieren. Eine entsprechende Kurve wird unten mitgeteilt werden.

Beziehung zum Spektrum.

Wenn man in einem Spektroskop durch Beobachtung mittels eines Okularspaltes ohne Linse in der bereits erwähnten Weise Felder von homogenem Licht erzeugt, so kann man ihre Farbe ziemlich leicht und sicher mit der eines möglichst reinfarbigen Aufstriches vergleichen, den man in deutlicher Sehweite neben dem Fernrohr so anbringt, daß mit einer geringen Augenbewegung der Blick von der einen Farbe zur anderen gerichtet werden kann. Sorgt man noch durch die Beleuchtung dafür, daß die Helligkeit beider Felder tunlichst gleich wird, so ist die Ermittelung übereinstimmender Farben recht weitgehend gesichert. Ich habe dergestalt die Farben meines Farbenkreises den Spektralfarben zugeordnet, soweit letztere dort vertreten sind und gebe in der nachstehenden Fig. 4

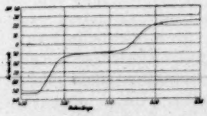


Fig. 4.

das Ergebnis dieser Beobachtung. Als Ordinaten dienen die Nummern des Farbenkreises, als Abszissen die Wellenlängen. Jede Einstellung wurde mehrfach wiederholt, woraus sich

die Größe des Fehlers derartiger Messungen ergab. Er war von der Ordnung einer Einheit der Farbtonstufen. Die zugehörige Kurve ergibt ein einigermaßen unerwartetes Bild. Es war bekannt, daß an den beiden Enden des Spektrums sich relativ ausgedehnte Gebiete befinden, innerhalb deren eine bedeutende Änderung der Wellenlänge nur eine sehr geringfügige Änderung des Farbtons hervorruft. Die Zeichnung läßt erkennen, daß außer diesen beiden „unempfindlichen" Gebieten noch ein drittes im Gelbgrün vorhanden ist. Diese Tatsache bewirkt, daß beim flüchtigen Hinschauen auf ein kurzes Spektrum dieses sich nicht aus unendlich vielen oder sehr vielen, sondern nur aus drei Farben zusammenzusetzen scheint, nämlich Rot, Gelbgrün und Blauviolett. Die übrigen Farben nehmen im Spektrum so enge Gebiete ein, daß sie im Verhältnis zu den angegebenen verschwinden. Es ist wohl keinem Zweifel unterworfen, daß diese eigentümliche Beziehung in engem Zusammenhange steht mit den physiologischen Bedingungen des Sehens, deren gesetzmäßige Festlegung einerseits durch die Young-Helmholtzsche Dreifarbentheorie, andererseits durch die Theorie der zwei Gegenfarbenpaare von Hering wissenschaftlich zu fassen, versucht worden ist. Ich verzichte zurzeit ausdrücklich auf die Verwertung des vorstehenden Ergebnisses für die eine oder die andere der Theorien, vornehmlich aus dem Grunde, weil die weiteren Forschungen noch Material aus anderen Teilen dieses mannigfaltigen Erscheinungsgebietes beigebracht haben, welches für die kritische Erwägung der Angelegenheit gleichfalls in Betracht gezogen werden muß und weil voraussichtlich die wissenschaftliche Arbeit auf den angedeuteten Bahnen noch eine Anzahl weiterer Tatsachen ergeben wird, durch welche das Feld der Möglichkeiten sich in nutzbarem Maße wird einengen lassen.

Die praktische Bedeutung dieser Messungen liegt darin, daß sie zur eindeutigen Fixierung der Punkte des Farbenkreises benutzt werden können. Indem ähnliche Messungen von anderen ausgeführt werden, die den Farbenkreis nach ihrem Urteil und nach den Entscheidungen ihres Auges eingeteilt haben, wird sich herausstellen, wie groß die Schwankungen sind, die von den unvermeidlichen subjektiven Anteilen in der Durchführung einer solchen Teilung verursacht werden. Unter allen Umständen wird der Vergleich und die Zusammenstellung einer genügenden Anzahl solcher Messungen es ermöglichen, durch die Angabe der zugehörigen Wellenlängen einen durchschnittlichen, typischen oder normalen Farbenkreis zu definieren, auf den dann die individuellen reduziert werden können, soweit sie tatsächlich Abweichungen zeigen.

Analyse der Farben.

Wir haben nun die Grundlagen gewonnen, um jede vorgelegte farbige Fläche auf die Bestandteile ihrer Farbe zu untersuchen. Zunächst wird mit Hilfe eines durchgemessenen und bezifferten Farbenkreises die Gegenfarbe der vorgelegten aufgesucht, d. h. diejenige, welche mit ihr neutrales Grau ergibt. Zu dem Zweck wird schätzungsweise die Gegenfarbe aus dem Farbenkreise ausgewählt, das entsprechende Kärtchen neben die zu untersuchende Fläche gelegt und beide Farben mit Hilfe des Pomi zur Vermischung gebracht. Durch Querlegen eines neutralen Grau von der zu erwartenden Helligkeit sichert man sich gegen Wirkungen des Kontrastes und der Nachbilder und durch systematisches Probieren findet man dann sehr bald die genaue Gegenfarbe. Sei beispielsweise das Graugelb gegeben, wie es für den Umschlag der „Physikalischen Zeitschrift" verwendet wird. Dann wird man die Gegenfarbe in der Nähe von 50 zu suchen haben und beginnt deshalb mit der Karte 50, welche ergibt, daß das entstehende Grau nicht neutral gemacht werden kann, sondern zu rötlich ausfällt. Hieraus wird geschlossen, daß das grundlegende Gelb jener Mischfarbe rötlicher ist und man probiert nacheinander die folgenden Nummern, bis eine genaue Neutralisation gewonnen ist. Dem Ungeübten ist dringend zu empfehlen, alsdann mit den Karten noch weiter zu gehen und sich zu überzeugen, daß die folgenden blauen Farben das Grau zu grünlich ergeben, also im entgegengesetzten Sinne von der Gegenfarbe abweichen. Gleichzeitig gewinnt man dadurch eine Anschauung über die Genauigkeit, mit welcher man die Einstellung bewirken kann. Liegt kein besonderer Mangel an Farbensinn und einige Übung vor, so wird man sich bald auf eine oder höchstens zwei Einheiten des Farbenkreises gesichert fühlen. So ergibt sich als Gegenfarbe jenes Gelbgrau Nr. 57. Hierdurch ist zunächst, indem man von der Nummer der kompensierten Farbe 50 abzieht (bzw. 50 dazuzählt, wenn sie aus der ersten Hälfte des Farbenkreises genommen war), der Farbton der vorgelegten Farbe mit Nr. 7 bestimmt.

Es bleibt übrig die Reinheit und das Grau zu messen. Dieses geschieht, wie angegeben mit Hilfe von Lichtfiltern. Die Literatur über die Herstellung von solchen, die nur begrenzte Spektralgebiete durchlassen, ist bereits ziemlich reichhaltig und es gibt auch schon im Handel derartige Filter. Es soll deshalb auf die Herstellung nicht eingegangen werden, wohl aber

werden einige Anweisungen die Prüfung solcher Filter erleichtern. Man stellt aus den Aufstrichen des Farbenkreises einen reellen Farbenkreis von etwa 40 cm Durchmesser her, der nicht nur als Schaubild für die Entwicklung des Farbensinnes die allerbesten Dienste tut, sondern auch experimentell mannigfaltig gebraucht werden kann. Prüft man einen solchen Farbenkreis mit dem Lichtfilter, so kann man zweierlei Fälle beobachten. Entweder kommt noch ein Teil der Buntfarbigkeit des Farbenkreises zur Geltung, indem zwischen dem dunklen Teil, wo die Absorption praktisch vollständig ist und dem hellen, wo die Remission es ist, Gebiete liegen, in denen Reste der Eigenfarben sichtbar sind. Das bedeutet, daß die Durchlässigkeit des Lichtfilters zu groß ist. Oder diese ist klein genug; dann zerfällt der ganze Farbenkreis in eine dunkle und eine helle Hälfte, deren Lage von der Farbe des Lichtfilters abhängt und deren beide Teile durch kurze Übergänge miteinander verbunden sind. Zeigt das Lichtfilter diese Eigenschaft, so ist es für unsere Zwecke brauchbar. Mit Hilfe eines geeigneten Durchlaßfilters, welches die Farbe des Aufstriches durchtreten läßt und eines geeigneten Sperrfilters, welches sie absorbiert, stellt man nun unter Benutzung einer photometrisch durchgemessenen Grauleiter die beiden ausgezeichneten Helligkeiten, die größte und die kleinste, fest; sie sollen fortlaufend mit h_1 und h_2 bezeichnet werden. Nun stellt sich h_1, wie vorher dargelegt, als die Summe der Helligkeiten der reinen Farbe plus dem vorhandenen Weiß dar und daher ist $1-h_1$ gleich dem Schwarzanteil der Farbe. Dagegen stellt h_2 unmittelbar den weißen Anteil dar, da das Sperrfilter den bunten Anteil vollständig zurückhält. Beide Bestimmungen beruhen auf der Anwendung der Gleichung $r + w + s = 1$, welche für die gesamte Farbenanalyse und -synthese dieselbe Bedeutung hat, wie etwa das Ohmsche Gesetz für die Lehre von den elektrischen Strömen. Alle Eigenschaften der gebrochenen Farben werden vollständig und genau dargestellt durch die additive Beziehung der genannten drei Komponenten: reine Farbe, Schwarz und Weiß. Die mannigfaltige Anwendung, welche diese Gleichung findet und die unter sich übereinstimmende Beschaffenheit der Resultate, die mit ihrer Hilfe erzielt werden, bilden ebensoviel Beweise für die Richtigkeit dieser allgemeinen additiven Beziehung.

Aus dem oben Gesagten gehen nun folgende beiden Gleichungen hervor. $h_1 = 1 - s$ und $h_2 = w$; daraus ergibt sich $h_1 - h_2 = 1 - s - w = r$, d. h. es ergibt sich die Reinheit, wenn man die zweite Helligkeit von der ersten abzieht.

Die Gleichung $r + s + w = 1$ lehrt, daß von den drei Veränderlichen r, w und s nur zwei willkürlich bestimmbar sind, da die dritte alsdann durch die Bedingung festgelegt ist, daß die Summe aller $= 1$ sein muß. Es ist daher nötig und zureichend, daß man für die eindeutige Bestimmung der Farbe neben dem Farbton und der Reinheit noch ein Datum, etwa den Anteil Schwarz oder Weiß angibt, welcher in der Farbe enthalten ist. Ebenso kann man natürlich auf die Angabe der Reinheit verzichten und sowohl Schwarz wie Weiß in Bruchteilen der Einheit angeben, da hierdurch die Reinheit ihrerseits bestimmt ist. Es ist willkürlich, welche von den möglichen Kombinationen man wählt. Am meisten symmetrisch würde wohl die Form sein, daß man auf die Reinheit verzichtet und Schwarz und Weiß in Prozenten gibt. Andererseits ist aber für die Beurteilung der Farbe die Kenntnis ihres Reinheitsgrades grundlegend und es besteht somit ein praktisches Bedürfnis, diese maßgebende Größe alsbald zur Anschauung zu bringen. Es wird deshalb vielleicht am ratsamsten sein, die Reinheit und das Weiß ein für allemal als die anzugebenden Größen festzustellen und nur in besonderen Fällen, wo es sich darum handelt, eigenartige Verhältnisse hervorzuheben, eine der anderen möglichen Kombinationen zu benutzen.

Unter allen Umständen erkennt man, daß mit der Messung der beiden Größen h_1 und h_2 die Analyse der Farbe vollendet ist. Bestimmt man diese Größen in Prozenten, so gewinnt man zwei zweistellige Zahlen für die Reinheit und das Grau, wie wir allgemein die Kombination von Schwarz und Weiß nennen wollen, die in der Farbe neben dem reinen Farbton vorhanden ist. Mit der zweistelligen Nummer des Farbtones hat man insgesamt drei zweistellige Zahlen, durch welche die Zusammensetzung der Farbe eindeutig dargestellt wird. Die hierdurch erreichte Genauigkeit kommt fast überall nahe an die Unterschiedsschwelle heran. Dort, wo man experimentell eine größere Feinheit erreichen kann, lassen sich natürlich ohne weiteres die Dezimalen entsprechend vermehren.

Setzt man weiterhin ein für allemal die Reihenfolge fest, in welcher die betreffenden Angaben gemacht werden, so genügen die 6 Ziffern ohne weitere Bezeichnung, um die gegebene Farbe zu kennzeichnen. Als solche normale Reihenfolge schlage ich vor die Ordnung Farbeton, Reinheit, Weiß zu wählen. Die Folge der Anfangsbuchstaben f, r, w erinnert an das Wort Farbe und auf Grund dieser Bemerkung kann man die Ordnung leicht reproduzieren, wenn man sie vergessen haben sollte. Beispielsweise finde ich für das Graugelb des

Zeitschriftumschlages die Werte $h_1 = 47$ und $h_2 = 16$, woraus $r = 31$ folgt. Unter Zuziehung der Nr. 7 (oder zweiziffrig 07) des Farbtones folgt für diese Farbe das Zeichen 07.31.16 oder kurz 07 31 16, wonach in aller Zukunft diese Farbe immer wieder hergestellt werden könnte, wenn ein Interesse dafür aufträte.

Die Resultate einer solchen Farbenanalyse haben allgemeinen Charakter. Daß die Bestimmungen der beiden Größen r und w überhaupt absolute Natur haben, ist bereits dargelegt worden und ebenso, daß der bei der Einteilung des Farbenkreises vorhandene konventionelle, weil von einer Übereinkunft über das normale Farbensehen abhängige Anteil vermutlich sehr klein ist, d. h. ein oder zwei Einheiten des Farbenkreises nicht überschreitet, so darf auch für diese Größe eine praktische Allgemeinheit in Anspruch genommen werden. Hiermit ist in der Farbenlehre endlich ein Punkt erreicht, der vergleichbar mit jener Wendung in der Wärmelehre ist, die in dem Augenblick entstand, wo ein reproduzierbares Thermometer mit wohldefinierten Fixpunkten und sachlich gerechtfertigtem Einteilungsprinzip erfunden war. Die Farbe tritt aus dem Gebiet der subjektiven Schätzung in das der objektiven Messung hinüber und die ganze unabsehbare Entwicklung, welche bisher noch ein jedes wissenschaftlich faßbare Gebiet durch die Einführung von Messungsprinzipien und Messungsmöglichkeiten erfahren hat, läßt sich für die jetzt beginnende Zukunft der Farbenlehre voraussehen.

Natürlich legt die Möglichkeit einer Analyse der Farben die Frage nach der Möglichkeit einer Synthese alsbald nahe. Eine solche Synthese ist in der Tat ohne weiteres ausführbar. Haben wir beispielsweise für das oben erwähnte Gelbgrau des Zeitschriftumschlages festgestellt, daß es ein Abkömmling des Gelb Nr. 7 ist, so wissen wir, daß wir dieses Gelb mit dem Grau zu kombinieren haben, dessen Beschaffenheit wir alsbald aus dem Verhältnis von Weiß (16) zu Schwarz (53) oder was eine bessere Definition des Grau gibt, aus dem Verhältnis Weiß zur Summe Weiß + Schwarz (16 : 69 gleich 23) entnehmen können. Hätten wir einen idealreinen gelben Aufstrich von der Farbe Nr. 7, so brauchten wir dieses Gelb nur mit dem eben definierten Grau in dem aus der Messung folgenden Verhältnis 31 : 69 im Pomi zu mischen, um die Farbe zu haben. Tatsächlich enthält aber unser Farbenkärtchen bereits einen gewissen Anteil Schwarz und Weiß, den wir übrigens aus den vorher beschriebenen Messungen kennen. Durch eine einfache Rechnung, die im einzelnen hier nicht dargelegt zu werden braucht, kann man feststellen, welches Grau und in welchem Verhältnis es zuzufügen ist, um die Farbe zu erzeugen.

Gleichzeitig ergibt sich aus dieser Betrachtung die Begrenzung der Farbensynthese. Man kann ganz allgemein nur weniger reine Mischfarben aus den Farben gegebener Aufstriche erzeugen und niemals reinere und weiterhin kann man niemals Mischungen erzeugen, in denen das Verhältnis der reinen Farbe zu Weiß oder zu Schwarz größer ist, als in der Farbe, die zu der Synthese dient. Es hat deshalb eine erhebliche praktische Bedeutung, daß man die Farbkarten des Farbenkreises in bezug auf Reinheit so weit entwickelt als das zurzeit technisch möglich ist. Leider muß man bei dieser Arbeit einen Umstand in den Kauf nehmen, der zurzeit noch in ziemlich hohem Maße wirksam ist, dessen Beseitigung aber man von dem Fortschritt der Technik erwarten kann. Diejenigen Pigmente, welche die reinsten Farben ergeben, pflegen auch durchschnittlich die wenigst lichtechten zu sein, so daß die Aufstriche, welche die äußersten Grenzen der gegenwärtig erreichbaren Reinheit darstellen, gleichzeitig zu den empfindlichsten gegen die bleichende Einwirkung des Lichtes gehören. Für die Praxis wird man deshalb wohl voraussichtlich den künftigen Farbatlas aus zwei Arten von Farben herstellen, nämlich aus dauerhaften mit beschränktem Reinheitsbereich und über diese hinaus aus solchen von höchst möglicher Reinheit, bei deren Behandlung man aber auf die vorhandene Empfindlichkeit gegen Licht wird Rücksicht nehmen müssen.

Das Farbendreieck und der Farbenkörper.

Die allgemeine Gleichung $r + w + s = 1$ gibt nun auch eine nachträgliche Motivierung für die Zweckmäßigkeit der bereits früher verwendeten Darstellung aller Abkömmlinge eines gegebenen Farbtones in einem Dreieck, dessen Ecken durch die Punkte w, r und s gebildet werden. Man könnte auch, wie ich das früher getan habe, neben r als rechtwinklige Koordinaten das oben definierte Grauverhältnis verwenden, wobei man den Vorzug gewinnt, daß beide Variabeln unbeschränkt innerhalb ihrer natürlich gegebenen Grenzen variiert werden können. Ein entsprechendes Diagramm hat aber dann in seinen vier Ecken s und w auf der einen Seite und auf der anderen Seite beide Male r, wodurch ein Mangel an Symmetrie in der Darstellung entsteht, abgesehen davon, daß die benutzten Koordinaten nicht unmittelbare Messungsergebnisse, sondern Produkte einer allerdings sehr einfachen Rechnung sind. Es ist daher zweckmäßiger, die erwähnten Dreiecks-

koordinaten zu benutzen, zumal ihre Anwendung eine sehr übersichtliche Orientierung über sämtliche möglichen Abkömmlinge einer gegebenen reinen Farbe gewährt. Ein derartiges Feld wird wie bekannt von drei ausgezeichneten Punkten und drei ausgezeichneten Grenzlinien umschlossen und hat drei ausgezeichnete Richtungen, welche sachlich zusammengehörige Werte vereinen. Die drei ausgezeichneten Punkte sind bereits vielfach erwähnt, sie sind der Weißpunkt *w*, der Schwarzpunkt *s* und der Punkt der reinen Farbe oder Farbenpunkt *r*. Zwischen ihnen verlaufen die drei ausgezeichneten Linien. Zunächst die Schwarz-Weiß-Linie durch alle Abstufungen des Grau, welche allen Farbenfeldern gemeinsam ist. Ferner die Weiß-Farbe-Linie und die Schwarz-Farbe-Linie, welche für jede reine Farbe eine besondere Reihe von Abkömmlingen darstellen. Diese an den Grenzen des Farbfeldes liegenden Farben, die aus der reinen Farbe durch Zumischung entweder von Weiß allein oder von Schwarz allein entstehen, unterscheiden sich durch ihr Aussehen charakteristisch von den anderen, die innerhalb des Feldes liegen. Wir wollen sie wegen ihres Aussehens die klaren Farben nennen, während innerhalb die trüben Farben auftreten, und zwar sollen die der Linie *wr* die hellklaren, die der Linie *sr* die dunkelklaren Farben heißen. Die ersten sind dem Maler bekannt als die Produkte der Vermischung irgendeines möglichst farbenreinen Pigments mit Weiß (wobei indessen Verschiebungen des Farbtones bis zu 10 Einheiten auftreten), die anderen als die entsprechenden Produkte der Vermischung mit Schwarz. Der ersten Gruppe gehören ferner, wie früher dargelegt wurde, sämtliche unbezogenen Farben, die nicht gesättigt sind, an. Die ganze Pracht der durch Polarisation, Interferenz, Beugung, Brechung usw. entstehenden sogenannten physikalischen Farben beruht auf ihrer Zugehörigkeit zu dieser Gruppe. Die andere ausgezeichnete Reihe der dunkelklaren Farben läßt sich in Gestalt von Aufstrichen nur sehr unvollkommen verwirklichen, da ja die schwarzen Pigmente sämtlich sehr deutlich erkennbare Mengen Weiß zurückwerfen und daher reine dunkelklare Farben nicht ergeben. Am meisten nähern sich noch die Farben des Sammets diesem Ideal und ebenso kann man durch optische Vermischung möglichst wenig weißenthaltender Farbaufstriche mit dem idealen Schwarz des Dunkelkastens eine ziemlich weitgehende Annäherung erzielen. Alle Beobachter, welche diese Farben kennen gelernt haben, sprechen sich übereinstimmend über deren Schönheit aus, die sich der Schönheit der hellklaren Farben durchaus an die Seite stellt. Es macht sich hierbei noch die Besonderheit geltend, daß bereits sehr geringe Anteile (unterhalb 1 Proz.) reiner Farbe, die dem Schwarz zugesetzt werden, den Farbencharakter der dunkelklaren Farben auf das deutlichste zum Ausdruck bringen, während umgekehrt Farbenmengen unterhalb 10 Proz. in Weißgemischen kaum als solche erkennbar sind. Dies sind psychologische Besonderheiten, welche mit dem Fechnerschen Gesetz zusammenhängen.

Soviel über die ausgezeichneten Linien des Farbendreiecks. Innerhalb derselben verlaufen nun gegenüber jedem der charakteristischen Eckpunkte und parallel zu der gegenüberliegenden Seite drei ausgezeichnete Richtungen, in denen jeweils der Wert jenes Eckpunktes konstant ist. Legen wir stets den Weißpunkt nach oben, den Schwarzpunkt nach unten und den Farbenpunkt nach rechts, so daß das Dreieck links eine senkrechte Kante hat, so verlaufen zunächst parallel dieser, also gegenüber dem Farbenpunkt *r* die Linien gleicher Reinheit oder gleichen Anteils an Farbe. Sie liegen so, daß der Anteil an Farbe umso größer wird, je mehr sich die Linie dem Farbenpunkte nähert, und werden dementsprechend kürzer. Stellt man sich eine Anzahl von Aufstrichen her, welche einen gleichen Anteil, beispielsweise 50 Proz. reiner Farbe enthalten, so erlebt man eine große Überraschung. Diejenigen, bei denen der unbunte Anteil aus reinem Weiß besteht, sehen unverhältnismäßig viel farbloser aus als diejenigen, welche neben 50 Proz. reiner Farbe 50 Proz. Schwarz enthalten und denen man ihren Gehalt an Schwarz kaum ansieht. Wir haben im gewöhnlichen Leben keinerlei Gelegenheit, solche Abwandlungen kennen zu lernen, bei denen die Reinheit unverändert bleibt und nur die Beschaffenheit des beigemischten Grau sich zwischen den äußersten möglichen Grenzen ändert und deshalb haben wir auch kein Gefühl für die Zusammengehörigkeit entsprechender Farben ausbilden können.

Die zweite ausgezeichnete Richtung verläuft gegenüber dem Weißpunkt von links unten nach rechts oben und faßt die Farben gleicher Weiße zusammen. Der nichtweiße Bestandteil setzt sich längs dieser Linien in wechselnden Verhältnissen aus Schwarz und reiner Farbe zusammen. Eine Reihe derartiger Farben erscheint gleich hell, wenn man sie durch ein Sperrfilter betrachtet. Die psychologische Zusammengehörigkeit solcher Farbenreihen empfindet man viel stärker. Ebenso überzeugt man sich, daß die psychologische Reinheitsabstufung mit der analytischen im wesentlichen übereinstimmt. Verfertigt man sich eine Anzahl von Stufen, in denen bei konstantem Weiß die Rein-

heit sich um gleiche Beträge ändert, so empfindet man sie auch als gleichabständig. Es liegt dieses daran, daß psychologisch die reinen Farben dem Weiß gegenüber sich ähnlich wie Schwarz verhalten.

Die dritte Schar ausgezeichneter Linien verläuft endlich von rechts unten nach links oben und stellt die Farben gleicher Schwärze dar, wobei innerhalb jeder derartigen Linie das Verhältnis zwischen Weiß und reiner Farbe alle möglichen Werte annimmt. Diese Linien erscheinen gleich hell, wenn man sie durch ein Durchlaßfilter betrachtet, das ja durch dieses das vorhandene Schwarz allein zur Geltung kommen läßt. Hiermit sind die vorhandenen Möglichkeiten erschöpft.

Die Gesamtheit aller Abkömmlinge eines Farbtons, mit anderen Worten die systematische Ausfüllung des Farbendreiecks, läßt sich nun herstellen, indem man eine der drei ausgezeichneten Linienscharen experimentell ausarbeitet. Welche von ihnen dazu gewählt wird, ist wesentlich eine technische Frage. Aus mannigfaltigen Gründen, die hier im einzelnen nicht dargelegt werden sollen, hat sich erwiesen, daß die Richtung des konstanten Weiß die zweckmäßigste ist. Man stellt zunächst, soweit es die vorhandenen Pigmente ermöglichen, die Linie der hellklaren Farben mit bestimmten Abständen des Weißgehalts her. Dann wird jede dieser Mischungen mit dem zugehörigen Grau, das den gleichen Weißgehalt hat, in den erforderlichen Verhältnissen vermischt, um bestimmte Punkte der Linie in den gewählten Abständen zu besetzen. Beide Mischungsverhältnisse werden ermittelt, indem man zunächst einige willkürliche Mischungen von bekanntem Verhältnis herstellt, sie chromatisch analysiert und darauf durch Interpolation die Mischungsverhältnisse aufsucht, welche die gewünschten Zwischenfarben ergeben. Indem man dergestalt mit allen Parallelen, die zu verwirklichen sind, verfährt, bedeckt man das dreieckige Gebiet oder isochrome Feld mit regelmäßig geordneten Repräsentanten sämtlicher herstellbaren Abkömmlinge des fraglichen reinen Farbtons.

Alle derartigen Farbendreiecke ergeben, wenn sie in der Folge des Farbenkreises nebeneinander gestellt werden, den Farbenkörper, der die Gesamtheit aller möglichen Farben umfaßt. Ordnet man die Dreiecke parallel, indem man den Farbenkreis in eine Gerade entwickelt, so hat der Farbenkörper die Form eines dreiseitigen Prismas; ordnet man sie um die gemeinsame Grau-Linie als Achse, so nimmt der Farbenkörper die Gestalt eines flachen Doppelkegels an, an dessen Peripherie der Kreis der reinen Farben liegt und dessen beide Flächen von den hellklaren und den dunkelklaren Farben gebildet werden. In den beiden Scheiteln liegt Weiß und Schwarz, und in der Achse liegen alle Grau.

Dies ist die rationelle Lösung des alten Problems von der angemessenen Gestalt des Farbenkörpers, dem bisher die mannigfaltigsten Formen (dreiseitige Pyramide, Kegel, Kugel, Halbkugel usw.) gegeben wurden.

Die Farben der Pigmente.

Sowohl die ausgezeichneten Punkte, wie Linien des Farbendreiecks sind im bunten Gebiete Ideale, die sich in Aufstrichen nicht verwirklichen lassen. Was man erreicht, ist nur eine Annäherung, über deren Betrag das Erforderliche bereits in großen Zügen angegeben ist. Da es eine maßgebende Bedeutung für die Beurteilung der Farbeigenschaften eines gegebenen Pigments hat, welches Gebiet von Abkömmlingen mit seiner Hilfe erreichbar ist, so muß man für jedes Pigment seine charakteristische Linie oder seinen „Kennzug" feststellen, durch welchen derjenige Teil des Farbendreiecks abgegrenzt wird, in den man durch Mischungen mit Hilfe von Schwarz und Weiß verwirklichen kann. Dieses Gebiet wird einerseits durch die Farben derjenigen Mischungen begrenzt, die man aus dem Pigment durch stufenweisen Zusatz von reinem Weiß erzeugen kann, andererseits durch die Farben der entsprechenden Mischungen mit möglichst reinem Schwarz. Beide Linien gehen von dem Punkte des reinen Pigments aus, der mehr oder weniger nahe an *r* liegt und nähern sich asymptotisch den Grenzlinien *rw* und *rs*. Sie schneiden also aus dem dreieckigen Feld ein ungefähr hyperbolisch begrenztes engeres Gebiet heraus, welches umso größer ausfällt, je reiner die Farbe des Pigments ist. Es ist in hohem Maße lehrreich, eine Anzahl solcher Linien herzustellen und sie miteinander zu vergleichen. Denn wir haben in der Bestimmung des Kennzugs das lange gesuchte wissenschaftliche Hilfsmittel zur Charakteristik der chromatischen Eigenschaft jedes vorgelegten Pigments.

Über den allgemeinen Verlauf dieser Kennzüge läßt sich folgendes bemerken. Die reinen Pigmente zeigen häufig Absorptionen, welche über ein Farbenhalb hinausgehen. Ihre Farbe ist alsdann ein Gemisch von gesättigter Farbe mit vorwiegendem Schwarz. Der weiße Anteil übersteigt bei schönfarbigen Pigmenten nicht 2 oder 3 Proz., während der Schwarzanteil entsprechend der breiten Absorption recht erheblich zu sein pflegt. Beim Zusatz von Weiß wird deshalb zunächst die reine Farbe des Pig-

ments zunehmend entwickelt, indem der Schwarzanteil schneller abnimmt als der weiße zunimmt und man erreicht bei gewissen Mischungsverhältnissen ein Maximum der Reinheit, das einem Vorrücken des Kennzuges bis zu seinem äußersten Wert nach rechts entspricht. Darüber hinaus ist die Zunahme an Weiß stärker als die Abnahme an Schwarz; der Kennzug wendet sich nach links und verläuft dann asymptotisch nach der weißen Ecke, bzw. bis zu jenem Punkt der Weiß-Schwarz-Linie, welcher von dem zur Vermischung benutzten Weiß besetzt ist. Denn auch das weißeste unserer gebräuchlichen Pigmente, das Zinkweiß erreicht das Idealweiß nicht, sondern enthält mindestens 5 Proz. Schwarz; Lithopon enthält 10 Proz. Schwarz. Andererseits läuft von dem Punkt der reinen Farbe ein ziemlich geradliniger Ast des Kennzuges nach der Richtung des Schwarzpunktes, aber wiederum nicht genau in die Ecke des Diagramms, sondern in den etwas höher gelegenen Punkt, der die Remission des benutzten schwarzen Pigments darstellt, also beispielsweise dem Punkt 2 Proz. bei der Anwendung von Frankfurter oder Pariser Schwarz. Die vorstehende Fig. 5 gibt die Kennzüge für einige bekannte Pigmente. Man erkennt deutlich die Sonderlage der gelben bis roten gegenüber den blauen und grünen in bezug auf die äußerste erreichbare Reinheit, auf welche bereits früher hingewiesen worden ist. Die Weiß-Verdünnungen wurden mit Lithopon gemacht, so daß der obere Konvergenzpunkt nicht bei *w* liegt, sondern 0,1 tiefer bei 0,90. Der Ort des reinen Farbstoffs ist durch einen Punkt hervorgehoben.

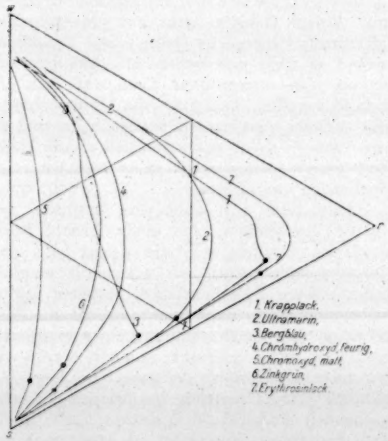


Fig. 5.

Neutralisationsverhältnis und Reinheitsverhältnis.

Mit den vorstehenden Betrachtungen ist zunächst das Material abgeschlossen, welches sich auf die Messung und die Systematik der Farben bezieht. Es ist damit ein Arbeitsmittel bereitgestellt, durch welches das gesamte Gebiet der Farbenlehre methodisch erforscht und quantitativ aussprechbaren Gesetzen unterworfen werden kann. Von der ungeheueren Anzahl der Probleme, die sich einer solchen Forschung alsbald darbieten, haben bisher natürlich nur einige wenige in Angriff genommen werden können, doch sind bereits die Ergebnisse dieser ersten Vorstöße von solcher Beschaffenheit, daß sie die zu gewinnenden Reichtümer anschaulich machen.

Eine Frage, mit der ich mich im Interesse des Reinheitsproblems bereits früher beschäftigt hatte, ist die nach dem Verhältnis zwischen der zur Neutralisation erforderlichen Mengen der Gegenfarben und ihrer Reinheit. Fragt man sich nämlich, welche Menge beispielsweise von Ultramarinblau erforderlich ist, um ein gegebenes Zitronengelb optisch zu neutralisieren, so kann man zunächst eine rein experimentelle Antwort darauf mit Hilfe des Pomi finden, indem man den Winkel feststellt, unter welchem die beiden genannten Komponenten neutrales Grau ergeben. Theoretisch wird man im ersten Augenblick geneigt sein, die Frage dahin zu beantworten, daß, wenn beide Farben vollkommen rein wären, natürlich gleiche Mengen beider zur Neutralisation erforderlich sind, und daß demgemäß die tatsächlich erforderlichen Mengen im umgekehrten Verhältnisse der Reinheit stehen müssen. Bei genauerem Nachdenken stößt man indessen auf Zweifel, ob diese Antwort richtig sein kann. Denn die Reinheiten sind, wie wir gesehen haben, absolute Größen, die von der Beschaffenheit des Auges und der Beleuchtung nicht abhängen. Die Beziehung der Gegenfarben dagegen ist von beiden Faktoren abhängig und man kann eine Identität der grundsätzlich verschiedenartigen Größen nicht erwarten. Es bleibt also nichts anderes übrig als mit Hilfe der objektiv bestimmbaren Reinheitszahlen die Äquivalente zu messen, nach denen sich zwei Gegenfarben zu neutralem Grau absättigen.

Das Ergebnis einer entsprechenden Untersuchung ist nun im Lichte der eben angestellten Überlegungen recht überraschend. Es stellt sich heraus, daß tatsächlich die Neutralisationsverhältnisse mit den Reinheitsverhältnissen übereinstimmen und daß die unkritische Vermu-

tung ihrer Gleichheit durch das Experiment bestätigt wird. Ich habe, um diese Frage zu prüfen, sämtliche 50 Paare meines Farbenkreises, deren Reinheit ich vorher gemessen hatte, mit Hilfe des Pomi auf ihr Neutralisationsverhältnis untersucht, wobei ich, um eine etwaige Einseitigkeit des Apparats unschädlich zu machen, Doppelbestimmungen mit verwechselter Lage der Komponenten ausgeführt habe. Das Ergebnis ist durch Fig. 6 veranschaulicht. Die starke Linie stellt die Reinheitsverhältnisse nach den objektiven Messungen dar, während die schwache Linie die Neutralisationsverhältnisse zum Ausdruck bringt. Beide Linien verlaufen zum Teil identisch, zum Teil nahe nebeneinander. Ob die Abweichung, welche

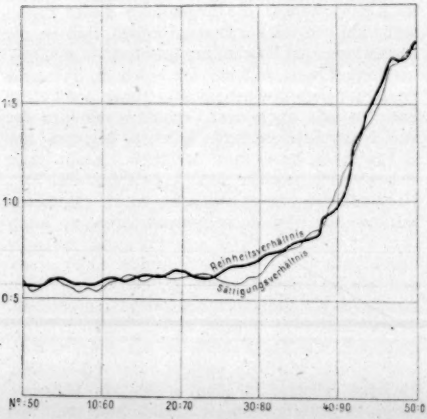


Fig. 6.

zwischen den Nummern 25 bis 33 eintritt, reell ist, was im Lichte der oben angestellten Betrachtungen durchaus nicht ausgeschlossen erscheint, oder ob sie von ungenügender Bestimmung der Reinheit in dem besonders schwierigen Gebiete der purpurnen und violetten Farben herrührt, wage ich noch nicht zu entscheiden. Unter allen Umständen ist die generelle Übereinstimmung der beiden Züge so groß, daß man das Gesetz von der Gleichheit der Neutralisations- und der Reinheitsverhältnisse jedenfalls als Grundgesetz dieses Gebietes ansprechen kann und nur noch festzustellen hat, ob sekundäre Abweichungen vom Grundgesetz stattfinden, welchen Betrag sie erreichen und wovon sie abhängig sind.

Die Helligkeit.

Ein weiteres Beispiel in gleichem Sinne bietet das Problem der Helligkeit dar. Die bisherigen Erörterungen haben ergeben, daß die Helligkeit für die Definition der Farbenmannigfaltigkeit nicht die Rolle spielt, welche man ihr früher zugeschrieben hat, da sie überhaupt keine Rolle in diesem Kapitel zu spielen hat. Nichtsdestoweniger liegt hier eine psychologische Tatsache vor, welche in dem übereinstimmenden Urteil über die Helligkeit der Farben zum Ausdruck kommt, das seit dem Beginn der Farbenlehre gefällt worden ist. Von allen Farben ist die gelbe die hellste, darauf kommt Grün, Rot, Blau und Violett. Nun wird freilich von fachkundiger Seite mit anscheinend sehr guten Gründen behauptet, daß die Bestimmung der Helligkeit bunter Farben unausführbar sei. Insbesondere Helmholtz hat seinerzeit das starke Gefühl der Unsicherheit und Willkür hervorgehoben, über welches er trotz großer Erfahrung auf diesem Gebiete nicht hat hinwegkommen können. Untersucht man die Verhältnisse näher, so stellt sich heraus, daß die Schwierigkeiten zum allergrößten Teile auf dem Umstande beruhen, daß man die Untersuchungen mit unbezogenen Farben angestellt hat und daß man sich bemüht hat, unmittelbar die Helligkeit verschiedener mehr oder weniger reiner Farben zu vergleichen.

Stellt man sich aber eine Grauleiter, wie vorher beschrieben, aus einer Anzahl kurzer paralleler Streifen her, die derart auf einen Rahmen geklebt sind, daß zwischen ihnen gleich breite offene Zwischenräume bestehen, so gewährt folgendes Experiment alsbald die Überzeugung, daß die Bestimmung einer spezifischen Helligkeit jeder beliebigen bunten Farbe eine durchaus ausführbare Aufgabe ist. Legt man nämlich diese Grauleiter so auf den zu untersuchenden Aufstrich, daß dessen Farbe in den Zwischenräumen hervortritt, so konstatiert man auf den ersten Blick, daß die Helligkeit der Farbe an dem schwarzen Ende der Grauleiter größer ist, als die der grauen Stufen, während sie an dem weißen Ende geringer ist. Man findet dann auch mit großer Sicherheit diejenige Stelle, an welcher von den beiden angrenzenden grauen Streifen der eine heller und der andere dunkler ist als die dazwischen liegende Farbe. Erleichtert wird die Beobachtung, wenn man das Ganze so gegen das Fenster orientiert, daß an den Rändern der grauen Streifen keine Schatten entstehen. Auch kann man auf solche Weise feststellen, daß verschiedene Beobachter, soweit sie nicht mit Anomalien behaftet sind, in bezug auf die Beurteilung der Helligkeit weitgehend übereinstimmen.

Ebenso kann man in irgendeinem Photometer die Helligkeit bunten Lichtes bestimmen, wenn man nur dafür Sorge trägt, als Kompen-

sation nicht irgendeine andere bunte Farbe, sondern ein neutrales Grau zu benutzen. In einem von mir konstruierten Halbschattenphotometer kann ich die Einstellung auf gleiche Helligkeit zwischen bunt und grau mit einem nur wenig größeren Fehler ausführen, als bei gleichfarbigen Feldern.

Läßt sich dergestalt für jede beliebige bunte Farbe ein Grau angeben, welches die gleiche Helligkeit wie diese besitzt, so kann man durch die Photometrierung dieses Graus ein quantitatives Maß für die Helligkeit der bunten Farbe gewinnen. Diese besteht nun ihrerseits aus dem reinfarbigen Anteil und einem bestimmten Grau. Die Helligkeit der vorhandenen Mischfarbe muß sich somit als eine verhältnismäßige Summe des tatsächlich vorhandenen Graus und des Graus darstellen lassen, welches der reinen gesättigten Farbe äquivalent ist.

Letztere läßt sich nicht messen, weil es absolut reinfarbige Aufstriche nicht gibt. Mißt man aber an einem trübfarbigen dessen Helligkeit und subtrahiert von dieser in angemessener Weise die Helligkeit des vorhandenen Graus, so läßt sich daraus die Helligkeit des reinen Anteils berechnen. Man gewinnt so ein Mittel, die Helligkeitseigenschaften dieser idealen Farben quantitativ zu bestimmen. Ist nämlich h die Helligkeit einer vorgelegten Farbe und h_0 die Helligkeit der zugehörigen reinen Farbe, so wird man unter der oben gemachten Voraussetzung die Gleichung aufstellen können $h = r h_0 + (1 - r)\, g$, wo g das Grau nach der oben gegebenen Definition darstellt, welches in der vorgelegten Farbe mit der reinen Farbe vermischt ist. Um g in gemessenen Werten auszudrücken, erinnern wir uns, daß es als das Verhältnis des Weiß geteilt durch die Summe von Weiß und Schwarz definiert wurde. Nun ist das Weiß $= h_2$ und das Weiß und Schwarz ergänzt die Reinheit zu Eins, hat also den Betrag $1 - (h_1 - h_2)$. Führt man diese Werte in den Ausdruck für h ein und löst ihn nach h_0 auf, so ergibt sich die Formel

$$h_0 = \frac{h - h_2}{h_1 - h_2}.$$

Diese Gleichung überrascht durch ihre Einfachheit und bietet sich einer Prüfung an der Hand der Erfahrung besonders willig dar. Das Experiment bestätigt nun den Ansatz durchaus. So wurde beispielsweise ein aus Lithopon hergestellter Füllfarbstoff von Naphtolgelb mit 1 Proz. Diamantschwarz vermischt, wodurch ein ziemlich dunkelgefärbtes Grüngrau oder Olivgrün entstand. Durch Neutralisation erwies sich das darin enthaltende Gelb als Nr. 2 entsprechend und es wurden Helligkeitsbestimmungen sowohl an dem Gemisch, wie an der Farbkarte Nr. 2 ausgeführt. Die nachstehende Tabelle

	h	h_1	h_2	$h_0$ber.
Reinstes Gelb Nr. 2	0,80	0,89	0,09	0,90
Naphtolgelb u. Schwarz	0,30	0,33	0,10	0,87

gibt die einzelnen Daten und in der letzten Spalte die beiden berechneten Werte von h_0, der Helligkeit des idealreinen Gelb Nr. 2. Der Unterschied zwischen beiden, welcher 3 Proz. beträgt, liegt innerhalb der Versuchsfehler und beweist die Richtigkeit jenes fundamentalen Ansatzes. Ähnliche übereinstimmende Resultate wurden in zahlreichen anderen Fällen erhalten.

Dies Ergebnis veranlaßt alsbald die Fragestellung nach dem Helligkeitsverlauf der ideal

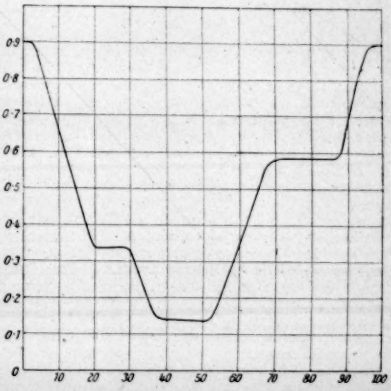


Fig. 7.

reinen Farben durch den ganzen Farbenkreis, den man offenbar feststellen kann, wenn man je eine beliebige zu jeder Nummer des Farbenkreises gehörige Farbe in der beschriebenen Weise analysiert. Eine entsprechend durchgeführte Versuchsreihe ergab Werte, die in der vorstehenden Fig. 7 übersichtlich dargestellt sind. Als Abszissen dienten die Nummern im Farbenkreise, als Ordinaten die Helligkeitswerte h_0. Wie man sieht, bestätigt sich zunächst jene allgemeine Schätzung bezüglich der Helligkeit der Farben. Dazu tritt aber eine Besonderheit, auf die ich durchaus nicht gefaßt war und deren Prüfung ich deshalb eine Anzahl weiterer Messungen gewidmet habe, durch welche sie immer wieder bestätigt worden sind. Die Kurve für die Helligkeit der reinen Farben im Farbenkreise verläuft nämlich nicht einfach sinusartig, wie man das erwarten würde, sondern sie zeigt deutliche Unterbrechungen wo die Helligkeit

über ein längeres Gebiet praktisch konstant bleibt. Und zwar sind vier derartige Terrassen vorhanden. Die eine liegt zwischen 95 und 3 im Gelbgrün und hellsten Gelb, die zweite zwischen 20 und 30 im lebhaften Rot von Mennige bis Karmin, die dritte zwischen 37 und 52 im Violett und die vierte endlich zwischen 68 und etwa 87 im mittleren Grün.

Auch diese bemerkenswerte Erscheinung deutet auf die physiologischen Hilfsmittel hin, mit denen unser Sehapparat seine Funktionen verrichtet und wird demgemäß ein wesentliches Element einer künftigen allseitig zureichenden Theorie der Farbenempfindungen bilden.

Diese ersten Ergebnisse der Farbenmeßkunst oder Chromometrie rechtfertigen wohl die Erwartung, daß diese das Tor zu neuen wichtigen Gebieten eröffnet, deren Umfang und Inhalt sich zurzeit nicht entfernt übersehen läßt.

(Eingegangen 5. Juli 1916.)

BESPRECHUNGEN.

Hugo Dingler, Die Grundlagen der Naturphilosophie. gr. 8°. X u. 262 S. Leipzig, Verlag Unesma. 1913. Geh. M. 6.—, geb. M. 7.—.

Unter den sechs Kapiteln des Buches, in denen der Verfasser, vielfach von neuen Gesichtspunkten aus, die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Naturwissenschaften und deren Zusammenhänge mit allgemein psychologischen und logischen Fragen darzulegen sucht, ist für den Physiker namentlich das zweite Kapitel von großem Interesse, das „Von der Wissenschaft" betitelt ist. Dingler zeigt sich in diesem Kapitel stark von Machschen Ideen beeinflußt, an die er öfter anknüpft; aber vielfach geht er in origineller Weise über sie hinaus, so namentlich, wenn er die Wichtigkeit der gedanklichen Zerlegung eines Vorganges in elementare Vorgänge betont, wenn er als notwendige Voraussetzung aller wissenschaftlichen Forschertätigkeit die sorgfältige Auswahl des Forschungsmaterials und die Abgrenzung des Forschungsgebietes hinstellt, wenn er von der Isolierung der wesentlichen Umstände bei dem Experimente spricht. Die ständige Verstärkung des „logischen Elementes" in einer Wissenschaft, die fortschreitende „Abbildung des logischen Gerüstes" der Mathematik auf sie sind es, die nach Dingler eine Wissenschaft aus dem experimentellen Stadium, in dem sie nur eine Sammlung von Einzeltatsachen darstellt, in das exakt-theoretische überführen. Die theoretische Wissenschaft aber zeigt die Tendenz, immer neue Teile der Wirklichkeit ihrer Behandlung zu unterwerfen, um (wie der Verfasser meint, in unendlich ferner Zeit) das ganze Wissen von der Wirklichkeit in einem einzigen großen „logischen Urbau" zu vereinigen.

A. E. Haas.

K. Sumpf und K. H. L. Magnus, Der praktische Lehrer. Übungen für Schulhandfertigkeit und Werkunterricht. 3. Auflage, bearbeitet von Rich. Maurer. gr. 8°. XV u. 233 S. mit 325 Abbildungen. Hildesheim und Leipzig, August Lax. 1915. Geh. M. 3.—, geb. M. 3.60.

Je mehr die seit 20 Jahren ernstlich erstrebte Vertiefung des naturwissenschaftlichen Unterrichts durch Schülerübungen verwirklicht wird, um so wichtiger wird für den Lehrer die Beherrschung der einfachsten Versuchshilfsmittel und vor allem die Fähigkeit, aus den Grundstoffen Holz und Pappe, Glas, Kork, Blech und Draht mit geeignetem Werkzeug einige Apparate selbst herzustellen. Das vorliegende Buch will hierfür dem Lehrer Anleitung, Rat und Hilfe geben, und zwar nach Maßgabe der Anforderungen, welche in Lehrerseminarien in der Ausbildung künftiger Volksschullehrer gestellt sind. Der Bearbeiter der 3. Auflage ist selbst im Lehrerseminar zu Freiburg tätig und versteht es, innerhalb der gegebenen bescheidenen Grenzen auf den ersten 167 Seiten die unentbehrlichsten Hilfsarbeiten und Anordnungen zu den einfachsten physikalischen Versuchen der Mechanik, Wärmelehre, Optik und Elektrizität mit Magnetismus auf knappem Raum sehr zweckmäßig zu behandeln. Den Abschluß (S. 168—216) bilden Fachübungen über Raumlehre und Feldmessen, Heimat- und Himmelskunde und Rechnen und (Seite 217—227) Preisangaben über Werkstatteinrichtungen und Apparatbaustoffe, sowie ein ausführliches Namen- und Sachregister. Für den Lehrer an höheren Schulen ist die Auswahl des Stoffes zu eng, dagegen kann den Schülern der höheren Lehranstalten das Büchlein als Anleitung zu „physikalischen Basteleien" sehr empfohlen werden.

K. T. Fischer.

Tagesereignisse.

Die Berliner Akademie der Wissenschaften wünscht für das Ellersche Legat eine Untersuchung, welche eine Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie, sei es durch eigene, sei es durch fremde Beobachtung, liefert, oder für eine künftige Prüfung neue Wege weist. Der ausgesetzte Preis beträgt 2000 Mark. Bewerbungsschriften können in deutscher, lateinischer, französischer, englischer oder italienischer Sprache abgefaßt sein und müssen bis zum 31. Dezember 1918 an das Bureau der Akademie gesandt werden.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Frankfurt a. M. Professor Dr. Heinrich Bechhold für medizinische Physikochemie.

Ernannt: Der a.o. Professor an der Universität Basel Dr. Erich Hecke zum ord. Professor der Mathematik ebendaselbst.

Gestorben: Der frühere Professor der Chemie an der Universität London Sir William Ramsey, der ord. Professor der Astronomie, Meteorologie und mathematischen Geophysik an der Universität Krakau Dr. Moritz Rudzki, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Technischen Hochschule Budapest Dr. Viktor Zemplén (auf dem italienischen Kriegsschauplatz gefallen), der Observator an der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg Dr. Walther Zurhellen (gefallen als Vizefeldwebel bei einem Infanterie-Regiment).

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.